

行星滚柱丝杠副运动及承载特性研究



重庆大学硕士学位论文 (学术学位)

学生姓名：祝明路

指导教师：陈兵奎 教 授

专 业：机械设计及理论

学科门类：工 学

重庆大学机械工程学院

二〇一八年五月

The Motion and Loading Characteristics Study of Planetary Roller Screws



A Thesis Submitted to Chongqing University
in Partial Fulfillment of the Requirement for the
Master's Degree of Engineering

By

Zhu MingLu

Supervised by Prof. Chen BingKui
Specialty: Mechanical Design and Theory

College of Mechanical Engineering of
Chongqing University, Chongqing, China

May, 2018

摘要

行星滚柱丝杠副以其高承载、高精度、长寿命等优点，在工程应用中被广泛应用于精密直线传动和重载领域，如精密数控机床、医疗设备、特种机械、机器人技术、航空工业、武器装备等。

行星滚柱丝杠副作为一种新型的精密直线传动机构，它依靠螺纹传动实现将丝杠的旋转运动转化为螺母的直线往复运动。通过丝杠周围均匀布置若干个滚柱，大幅度增加传动过程中螺纹副的接触对数，具有传动精度高、承载能力大、使用寿命长等优点。

本文以行星滚柱丝杠副为研究对象，探讨行星滚柱丝杠副的工作原理，对其运动学特性和承载特性进行研究。

本文主要内容如下：

①基于空间螺旋理论提出了一种行星滚柱丝杠副空间机构运动简图，开展了行星滚柱丝杠副的机构学研究，分析了各构件间的耦合关系，从数理层面论证了行星滚柱丝杠副的工作原理。

②根据行星滚柱丝杠副工作原理，分析了各构件几何形态和相互运动关系，导出了几何和工作参数设计计算公式。

③从理论上对行星滚柱丝杠副运动过程中各构件间的运动关系式进行了推导，通过研究滚柱与螺母间滚动接触和滚滑接触两种情况下的螺母轴向运动速度，分析其速度与螺母的螺纹头数、螺距以及丝杠角速度之间的关系；建立虚拟样机对行星滚柱丝杠副进行运动学分析，验证了理论推导公式的正确性；

④基于赫兹接触理论建立了弹性接触模型，导出了接触对之间的应力解析计算公式，探讨了影响行星滚柱丝杠副承载能力的主要因素；通过对模型合理简化，利用计算力学方法，对解析计算公式的正确性进行了验证。

⑤对不同支撑方式下丝杠轴向变形情况进行研究，考察不同支撑方式对丝杠轴向变形的影响，通过计算力学方法分析了丝杠应变与支撑方式之间的关系。

关键词： 行星滚柱丝杠副，精密直线传动，运动学特性，承载特性，弹性接触

ABSTRACT

The planetary roller screw pair has been widely used in precision linear transmission and heavy load applications in engineering applications such as precision CNC machine tools, medical equipment, special machinery, robotics technology, aviation industry, Weaponry, etc. due to its advantages of high load-bearing capacity, high precision, and long life, etc.

The planetary roller screw is a new type of precision linear transmission device, which relies on the threaded transmission to transform the rotating motion of the screw into a straight and reciprocating motion of the nut. Through arranging a number of rollers around the screw evenly, the numbers of contacting of the thread pair are greatly increased in the transmission, which has the advantages of high transmission precision, large bearing capacity, long service life, etc.

Taking the planetary roller screw as the research object, this paper explores the working principle of planetary roller screw, and studies its kinematics characteristics and bearing characteristics.

In this thesis, the main contents are as follows:

①Based on the space helix theory, the mechanism study of the planetary roller screw is carried out, and the motion diagram of the mechanism is drawn, then demonstrates the working principle of the planetary roller screw deputy from the mathematical level.

②According to working principle and mechanism analysis of the planetary roller screw, the geometrical shapes and mutual movement relations of each component are analyzed, and the calculation formulas for the design of geometry and working parameters are derived.

③The kinematic relations among the components in the motion of the planetary roller screw are theoretically derived. Though studied on the axial motion speeds of the nuts under pure rolling and sliding of rollers and nuts, the result is gained that the speed is proportional to the number of screw heads, the pitch and the angular velocity of the screw. The kinematics analysis of the planetary roller screw pair was established by the virtual prototype, which verifies the correctness of the theoretical derivation formula.

④Based on the Hertz contact theory, the elastoplastic contact model is established.

The stress variation formula between contact pairs is derived theoretically and the factors of affecting the bearing capacity of the planetary roller screw are discussed. Through the reasonable simplification of the model and the use of computational mechanics, the correctness of analytical formulae is verified.

⑤The theoretical study on the axial deformation of the screw under different support modes is carried out and then gained the variation rule of the axial deformation of the screw. The relationship between the screw strain and the support method was analyzed by computational mechanics.

Keywords: Planetary roller screw, Precision linear transmission, Kinematics characteristics, Bearing characteristics, Elastoplastic contact

目 录

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
1 绪 论.....	1
1.1 课题研究的背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	3
1.2.1 行星滚柱丝杠副基础理论研究现状	5
1.2.2 行星滚柱丝杠副运动学分析研究现状	6
1.2.3 行星滚柱丝杠接触分析研究现状	6
1.3 论文的主要研究内容.....	7
2 行星滚柱丝杠副机构学与结构参数分析.....	9
2.1 引言	9
2.2 行星滚柱丝杠副机构学分析	9
2.2.1 空间螺旋理论	9
2.2.2 行星滚柱丝杠副机构学分析	10
2.3 行星滚柱丝杠副参数分析	12
2.3.1 行星滚柱丝杠副结构参数	12
2.3.2 行星滚柱丝杠副工作参数	13
2.3.3 行星滚柱丝杠副装配参数	15
2.4 小结	17
3 行星滚柱丝杠副运动分析	19
3.1 引言	19
3.2 行星滚柱丝杠副的运动关系	19
3.2.1 纯滚动条件下运动分析	19
3.2.2 滚滑条件下运动分析	22
3.3 行星滚柱丝杠副实例分析	23
3.4 虚拟样机分析	24
3.4.1 虚拟样机	25
3.4.3 仿真结果分析	27
3.5 小结	28
4 行星滚柱丝杠副接触分析	29
4.1 引言	29

4.2 接触分析	29
4.2.1 Hertz 接触理论	29
4.2.2 点接触螺纹接触对接触强度理论研究	30
4.2.3 考虑载荷分布不均时接触强度理论研究	35
4.3 接触变形分析	36
4.4 设计实例接触分析	39
4.4.1 滚柱与丝杠啮合副轴向临界载荷	39
4.4.2 滚柱与螺母啮合副轴向临界载荷	41
4.4.3 螺纹接触对接触点处相对趋近量	42
4.4.4 理论计算结果分析	43
4.4.5 行星滚柱丝杠副承载能力与接触角和螺旋角之间关系	44
4.5 基于 ANSYS 的弹性接触分析	45
4.5.1 螺纹接触对分析模型	45
4.5.2 结果分析	46
4.6 小结	48
5 支撑方式对行星滚柱丝杠副承载特性的影响	49
5.1 引言	49
5.2 行星滚柱丝杠副支撑方式和理论分析	49
5.2.1 支撑方式	49
5.2.2 丝杠在不同支撑方式下的理论变形分析	50
5.2.3 实例分析	52
5.3 基于 ANSYS 的不同支承方式下丝杠应变分析	53
5.3.1 丝杠分析模型	53
5.3.2 结果分析	54
5.4 小结	56
6 结论与展望	57
6.1 结论	57
6.2 展望	57
致 谢	59
参考文献	61
附 录	65
A. 作者在攻读硕士期间发表的论文目录	65

1 绪 论

1.1 课题研究的背景及意义

随着对旋转运动与直线运动的转换机构需求的不断增大，相关传动机构也得到了一定的发展，工程领域常用的旋转与直线转换机构^[1]主要有：齿轮齿条传动机构图 1.1 (a)，同步带传动机构图 1.1 (b)，滚珠丝杠传动机构图 1.1 (c)，曲柄滑块机构图 1.1 (d)，蜗轮蜗杆传动机构图 1.1 (e)，凸轮机构图 1.1(f)等。对于各种传动机构的选用，应充分考虑需求与传动机构的特点：齿轮齿条传动机构结构简单、便于安装根据机械加工水平，可以控制一定的精度，同时通过拼接齿条，可以满足一定的行程需求，但是运动速度低、精度一致性不好保证，长时间工作机械磨损大，振动不易控制等，适用于运行速度慢、负载大、行程长的场合；同步带传动机构运行速度快、行程长、噪音低，但是刚性比较差、精度不高、推力小、易磨损等，适用于轻型、高速场合；滚珠丝杠传动机构通过滚珠分别与丝杠、螺母接触来传递动力，刚性好、精度高、噪音小，但是滚珠需要循环装置，滚珠易滑动，行程短，转速低等，适用于传动精度要求相对较高，行程短，速度要求不高的场合；曲柄滑块机构各构件间为几何封闭，工作稳定性较好，可实现一定的行程控制，但是结构制造安装精度要求高，高速运动时易产生振动以及动载荷，适用于小行程的直线往复运动；蜗轮蜗杆传动机构速比大、结构紧凑、噪音低、振动小，但是传动效率低，啮合齿面滑动速度大、摩擦损耗大，齿面磨损严重等，主要应用于传动比需求大、结构要求紧凑的场合；凸轮机构元件结构简单、紧凑，易于得到较高的制造精度，但是无可变性，点、线接触易磨损，行程小等，主要应用于轻工机械、印刷机械等需要预定运动规律的场合。



(a) 齿轮齿条传动



(b) 同步带传动机构

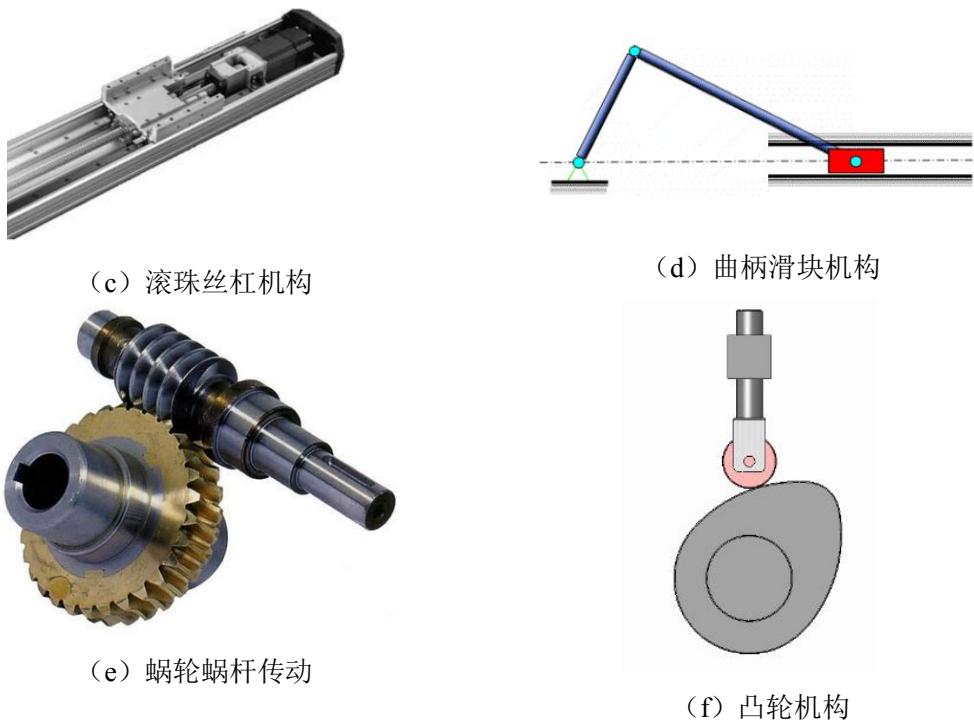


图 1.1 常见旋转与直线转换机构

Fig. 1.1 Common Rotary and Linear Conversion Mechanisms

近年来工程应用领域对于传动精度、承载能力要求越来越高，常规的旋转与直线运动转化机构难以同时满足高速、高承载能力、高精度、长寿命等要求，这就需要研制更加精密的传动部件，同时对于部件的承载能力也提出了较高的要求。自 1942 年由瑞典人 Carl B S 发明行星滚柱丝杠，图 1.2 所示，前期的发展中，受限于加工条件，理论研究不足，研究进展有限，随着制造业整体水平的不断进步，制造精度的提高，对于行星滚柱丝杠副高承载、高精度、长寿命的特点越来越引起重视。



图 1.2 行星滚柱丝杠

Fig. 1.2 Planetary Roller Screw

行星滚柱丝杠副以其高承载、高精度、长寿命等优点在工程领域得到了广泛的应用^[2]，如精密数控机床、医疗设备、特种机械、机器人技术、航空工业、武器装备等。其中，美国的 LIM-TEC 公司成功研制出了新型飞机起落架-电动作动器（EMA-Electromechanical Actuator），图 1.3 所示，成功实现了对于速度的精密控制，高动态的响应时间，高加速度，较低的维护成本，长寿命等，成功应用在了美国 F-35B 战斗机和法国空客 A380 的电动作动器起落架上，并且美国鱼鹰战斗机和武装直升机的航空武器悬挂发射系统装置均采用了行星滚柱丝杠作为核心部件的电动作动器。

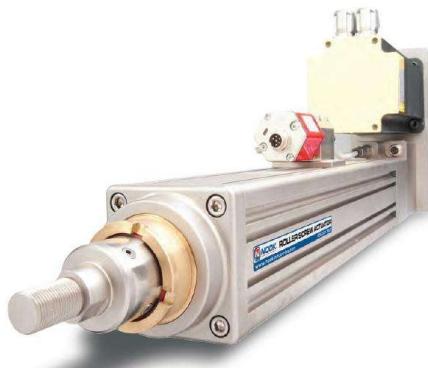


图 1.3 电动作动器

Fig. 1.3 Electric actuator

鉴于行星滚柱丝杠副的突出优点，随着材料与制造业的不断发展，材料性能及制造加工精度不断提高，其应用领域必将更加广泛。因此这就需要不断地加大对行星滚柱丝杠副的理论研究，确定行星滚柱丝杠副各构件参数对于产品性能的影响，不断优化产品性能，推进行星滚柱丝杠应用领域的不断进步。

1.2 国内外研究现状

行星滚柱丝杠副自 1942 年由瑞典人 Carl B S 发明以来，对于行星滚柱丝杠副的研究，涉及到了行星滚柱丝杠副性能的各个方面。

国外对于行星滚柱丝杠副的研究早于国内，并取得了一定的研究成果，其中作为行星滚柱丝杠副的发明人，Carl B S 于 1954、1965 年分别申请了循环式滚柱丝杠副和滚柱带螺旋升角的行星滚柱丝杠副专利^[3]。在行星滚柱丝杠副产品结构方面，德国 LTK、瑞士 Rollvis、英国 Power Jacks、瑞典 SKF^[6]、美国 LIM-TEC 已经推出了系列化的行星滚柱丝杠产品，图 1.4 所示，并应用到了精密机床、检测设备、飞机起落架作动器、武器发射系统等领域；国内厂家如山东博特精工、江苏仲孚精密传动、南京优励聂夫三家公司也推出了几种系列产品，图 1.5 所示，但是传动

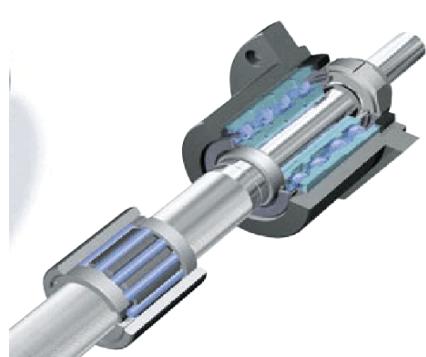
性能方面与国外产品有一定差距。



(a) LTK 行星滚柱丝杠



(b) Rollvis 行星滚柱丝杠



(c) SKF 行星滚柱丝杠



(d) LIM-TEC 伺服电动缸

图 1.4 国外厂家产行星滚柱丝杠

Fig. 1.4 The PRS made by foreign manufacturers



(a) 博特 BT-GZXS 行星滚珠丝杠



(b) 仲孚伺服电动缸



(c) 优励聂夫 PRZS 系列行星滚柱丝杠

图 1.5 国内行星滚柱丝杠

Fig. 1.5 The PRS made by domestic manufacturers

1.2.1 行星滚柱丝杠副基础理论研究现状

SKF 公司工程师 Lemor P C 通过大量实验对行星滚柱丝杠副失效形式及失效机理进行了相关研究，并讨论了其传动效率^[7]; Velinsky S A, Chu B 等建立行星滚柱丝杠三维模型，从运动学角度出发，进行了位置、变形等方面的研究^[8]; Hojjat Y, Agheli M M 从行星滚柱丝杠的整体性出发，考虑导程的影响，开展了滚柱与丝杠间轴向位移方面的研究^[9]; Auregan G, Fridrici V 等在建立有限元模型的基础上，开展了行星滚柱丝杠副接触点的研究^[10]; Dupont P 通过对比行星滚柱丝杠与滚珠丝杠的优点，进行了行星滚柱丝杠的优化设计研究^[11]; Chih-Kang S, Chinghua H 等在建立行星滚柱丝杠副有限元模型的基础上，进行了变形与应力分布方面的研究^[12]; Lisowski F, Ryć J 进行了行星滚柱丝杠副滚柱端齿啮合的研究，给出了一种减少螺纹配合滑动现象产生的一种齿轮啮合设计方法^[13]; Jones M, Velinsky S 等进行了行星滚柱丝杠副动力学方程方面的研究，并通过动态仿真，对行星滚柱丝杠副结构进行了优化^[14]; Aurégan G, Fridrici V 等对行星滚柱丝杠副的摩擦特性进行了研究，通过实验分析，得出了不同润滑条件对行星滚柱丝杠寿命的影响^[15]; Morozov V V, Panyukhin V I 等进行行星滚柱丝杠刚度与承载特性的研究，提出了一种通过调整滚柱表面来增加刚度与承载能力的方法^[16];

佟瑞庭，马尚君，刘更，付晓军等开展了行星滚柱丝杠动态特性、传动性能、螺旋曲面啮合副、摩擦热等方面的研究^[17,18,19]; Tong R. 通过建立摩擦力矩模型，研究了接触角及螺旋角与摩擦产生热量之间的关系^[20]; 靳谦忠，杨家军等分别就行星滚柱丝杠副各构件参数、静刚度、运动特性等方面进行了研究^[21,22,23]; 杨家军，杨保哲，韦振兴等通过建立刚度矩阵，得出了与理论分析相近的刚度曲线，并对行星滚柱丝杠副的结构参数化设计进行了优化^[24,25]; 程远在分析了滚柱、螺母及丝杠相对位置基础上，利用赫兹接触理论，对接触点位置进行弹性变形计算，得

出了行星滚柱丝杠副预紧力与接触角之间的关系^[26]; 王乐, 李海泓建立了行星滚柱丝杠副小转角数学模型, 通过对接触变形量和传动轴向位移的分析, 得出了小转角下行星滚柱丝杠副运动特性和动力学特性^[27]。

对于行星滚柱丝杠副的基础理论研究, 近些年学者研究涵盖了行星滚柱丝杠副的各个方面, 在啮合特性、摩擦特性、刚度、传动效率等方面取得了一定的研究成果, 但是对于基础理论的研究, 国内刚进入起步阶段, 与西方发达国家仍有一定的差距。

1.2.2 行星滚柱丝杠副运动学分析研究现状

行星滚柱丝杠副运动过程中, 参与到运动的构件主要有丝杠、滚柱(包括滚柱端齿)、螺母、内齿圈、挡圈, 做运动学分析时主要考虑这些构件的影响。

对于行星滚柱丝杠副的运动学方面的研究, Brecher C, Hildebrand M 等提出了行星滚柱丝杠副中滚柱任意导程的计算, 并进行行星滚柱丝杠副运动学特性分析, 通过对运动状态的检测, 给出了行星滚柱丝杠副的特征频率^[28]; Jones M H, Velinsky S A 通过建立运动学模型来预测行星滚柱丝杠副中滚柱与螺母的相对轴向位移, 并给出了滚柱—螺母间产生滑动的原因^[29]。

Liu Y, Wang J 等通过建立螺旋传递数学模型, 行星滚柱丝杠的进行运动学分析, 提出了一种计算实际传动比的新方法^[30]; Ma S, Zhang T 等给出了一种行星滚柱丝杠螺纹副的分析模型, 通过分析得出当螺纹旋向相同时无论纯滚动还是存在滑动的条件下轴向移动不受影响^[31]; Mamaev I M, Morozov V V 等通过对行星滚柱丝杠副进行运动学分析, 得出了运动误差函数, 并给出了减少运动误差的方法^[32]; 韩敏等分别进行了考虑弹性变形和不考虑弹性变形两种条件下丝杠与滚柱间的滑动模型, 并对模型进行仿真分析^[33]。

学者们倾向于利用分析软件进行三维建模, 做运动分析, 根据分析结果进行优化设计; 理论分析方面, 通过建立数学模型, 推导各构件参数对于运动学特性的影响。

1.2.3 行星滚柱丝杠接触分析研究现状

行星滚柱丝杠副中, 起到承载作用的是滚柱与丝杠、滚柱与螺母间的螺纹接触对, 对于整个系统而言, 带有螺纹牙的滚柱通过多个螺纹牙分别于丝杠、螺母啮合来传递载荷。

Baccar A, Lambert J Y 等通过建立螺纹接触的三维模型, 分析螺纹接触对间的载荷分布, 并利用统计学知识, 获取载荷分布的相关信息^[34]; Ma S, Liu G 等通过建立滚柱丝杠负载模型, 系统的研究了影响载荷分布的因素, 得出了减少接触角或者螺旋角可以使负载分布更均匀^[35]; Zhang W, Geng L 等研究了载荷条件、结构参数、螺纹参数对螺纹接触对载荷分布的影响, 通过对比分析, 给出了影响载

荷分布的条件^[36]; Abevi F K, Daidie A 等通过建立行星滚柱丝杠副有限元模型, 分析了系统在重载下的静态特性, 并给出了接触点应力分布^[37]; Zhang W, Liu G 等依据力平衡条件建立了行星滚柱丝杠副螺纹接触载荷分布模型, 分析了安装方式、螺纹参数对载荷分布的影响^[38]; Abevi F K, Daidie A 等提出了一种新的分析静载荷的方法, 通过利用干、梁、弹簧分别表示不同的构件来分析行星滚柱丝杠副中载荷的分布情况^[39]; Zhdanov A V, Morozov V V 等利用建立的弹性层模型, 对行星滚柱丝杠机构接触对的载荷分布进行研究, 给出了载荷分布与材料、加工精度、摩擦力相关^[40]。

刘艳强, 尚宇等采用赫兹接触理论对接触点载荷进行计算, 给出了接触角越大轴向承载能力越大的结论^[41]; 姚琴等建立丝杠与滚柱间单对接触模型, 通过解析计算, 结合有限元法, 分析了载荷滚柱丝杠弹塑性变形的关系^[42]; 宋敏, 杨雨薇针对滚柱端齿被螺旋线切除产生的不规则结构, 以滚柱端齿啮合副为研究对象进行了静态接触分析^[43]; 李凯, 叶佩青等开展了行星滚柱丝杠副作为精密传动部件传动特性方面的研究^[44]; 佟瑞庭, 刘更等建立单对滚柱与丝杠的接触对, 进行有限元分析, 对螺纹牙型角对接触特性的影响进行了研究^[45]。

国内外学者们对于行星滚柱丝杠副的接触分析, 多是基于螺纹接触对, 通过建立不同的接触模型, 对其承载特性进行分析, 并根据分析结果优化设计。

总体而言, 目前就企业研发方面, 国内缺少强实力的企业, 正逐步通过校企合作模式开展行星滚柱丝杠副的研究, 近些年推出了一些产品, 但是与国际上还有一定的差距。目前对于行星滚柱丝杠副的运动学分析, 多基于将行星滚柱丝杠副机构简化为行星齿轮传动机构, 这种简化方式, 对于机构学的分析提供了较为简便的分析方式, 但是无法反映出行星滚柱丝杠副作为空间螺旋运动机构的特点。对于行星滚柱丝杠副承载特性分析, 将滚柱简化为滚珠来分析, 传统的分析方式, 无法充分反映行星滚柱丝杠副螺纹接触对受力及变形趋势。

1.3 论文的主要研究内容

本文基于行星滚柱丝杠副空间机构运动特点, 对其运动过程中各构件间运动关系及相互影响进行运动学分析, 并对其承载能力进行研究。以行星滚柱丝杠副为研究对象, 推导出各构件间几何参数解析公式, 并依据推导出的解析公式, 进行实例设计, 利用虚拟样机技术和计算力学方法验证理论推导的正确性。

主要研究内容如下:

①探讨行星滚柱丝杠副工作原理, 基于空间螺旋理论构件行星滚柱丝杠副的空间机构运动简图, 并对其开展空间机构理论分析, 从数理层面论证其工作原理, 为后续结构和运动学分析提供依据;

②基于给出的行星滚柱丝杠副空间机构运动简图，分析各构件间几何形态和相互关系公式，对行星滚柱丝杠副进行结构参数和运动参数理论研究，导出各构件间几何参数和工作参数解析关系公式；

③从对行星滚柱丝杠副运动过程中各构件间的关系进行理论推导，并分别就滚柱与螺母间滚动接触和滚滑接触两个方面分析对螺母轴向运动线速度的影响；通过 Pro-E 对设计实例进行三维建模，利用 ADAMS 软件建立虚拟样机对行星滚柱丝杠副进行运动学仿真分析，验证解析计算公式的正确性；

④基于赫兹接触理论对行星滚柱丝杠副中的滚柱与丝杠、滚柱与螺母间的螺纹接触对进行弹性接触分析，建立接触分析模型，从理论上研究各构件参数对于承载能力的影响；简化行星滚柱丝杠副螺纹接触对模型，进行计算力学方法分析，对解析计算公式进行验证；

⑤对不同支撑方式下丝杠轴向变形量进行理论研究，分析不同支撑方式对于丝杠轴向变形的影响，并利用计算力学方法对丝杠应变与支撑方式之间的关系进行分析。

2 行星滚柱丝杠副机构学与结构参数分析

2.1 引言

行星滚柱丝杠副相对于滚珠丝杠来说，从传动的形式上来看，都含有丝杠、螺母等传递运动和载荷的构件，而不同之处在于传递运动和载荷的构件由滚珠变成了滚柱。本文以行星滚柱丝杠副为研究对象，要做到后期研究的顺利进行，首先应做好行星滚柱丝杠副的结构设计工作，从其运行机理出发，研究各构件间的运动关系及受力特性，为后续的承载特性分析提供理论基础。

2.2 行星滚柱丝杠副机构学分析

在机构学分析过程中，机构自由度作为确定机构或运动链位形的独立参数的数目，在实际工程应用中具有重要的意义。行星滚柱丝杠副虽然传动形式上类似于滚珠丝杠，但是并不能简单的将滚柱等同于滚珠进行分析，因为滚珠与滚柱结构差异性，利用滚珠并不能充分反映螺旋副的接触及运动特性。

2.2.1 空间螺旋理论

对于空间直线，图 2.3 所示， AB 可以由方向矢量 S 和位置相关矢量 S_0 来共同表示^[46]。直线也叫做线矢或节距为零的螺旋，其表达式为：

$$\$(S; S_0) = (S; r \times S) = (l \ m \ n; p \ q \ r) \quad (2.1)$$

$(S; S_0)$ 叫做直线的 Plücker 坐标，有 6 个分量，即 $(l \ m \ n; p \ q \ r)$ 。

在应用中，用 $h = S \cdot S_0 / (S \cdot S)$ 表示螺旋的节距， $S_0 = r \times S + hS_0$ 。当节距为零时就是线矢，表示转动副或者约束力，而节距无穷大时，即 $\$(0; S)$ ， S 表示方量，该螺旋表示移动副或者约束力偶。

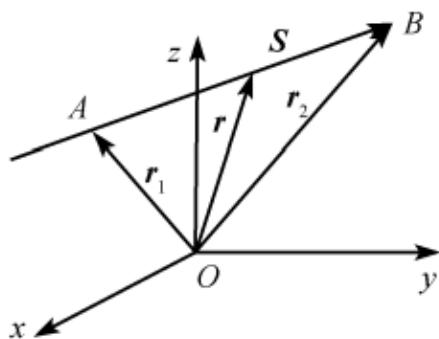


图 2.3 空间直线

Fig. 2.3 Space straight

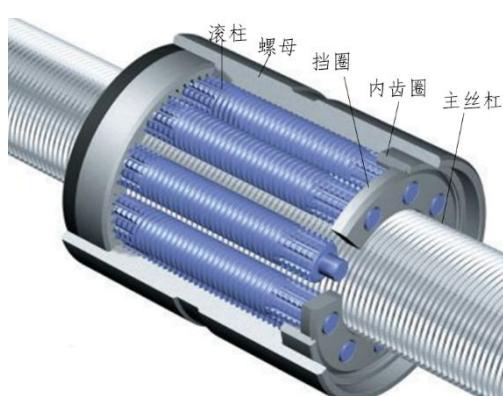
从机构空间螺旋理论出发，对于两个螺旋 $\$ = (S; S_0)$, $\$^r = (S^r; S_0^r)$ ，他们的互易积^[46]记为：

$$\$ \circ \$^r = S \cdot S_0^r + \$^r \cdot S_0 \quad (2.2)$$

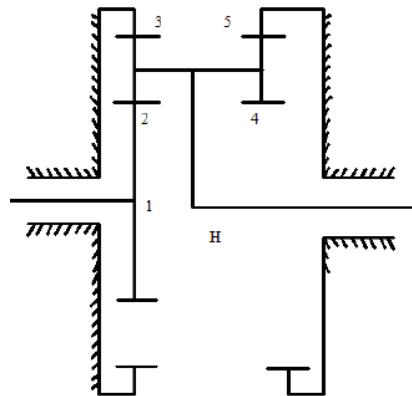
运动螺旋和力螺旋的互易积就是这两个螺旋产生的瞬时功率。

若两螺旋的互易积为零，则它们互逆或互为反螺旋。即当 $\$, \r 互为反螺旋时， $\$ \circ \$^r = 0$ 。对于运动螺旋 $\$$ 的反螺旋 $\r ，如果它的节距 h 为零，则代表 1 个约束力，限制了其沿约束力方向的移动；如果它的节距 h 为无穷大，则代表 1 个约束力偶，限制了其绕此力偶方向的转动。

2.2.2 行星滚柱丝杠副机构学分析



(a) 行星滚柱死丝杠



(b) 行星滚柱丝杠平面机构简图

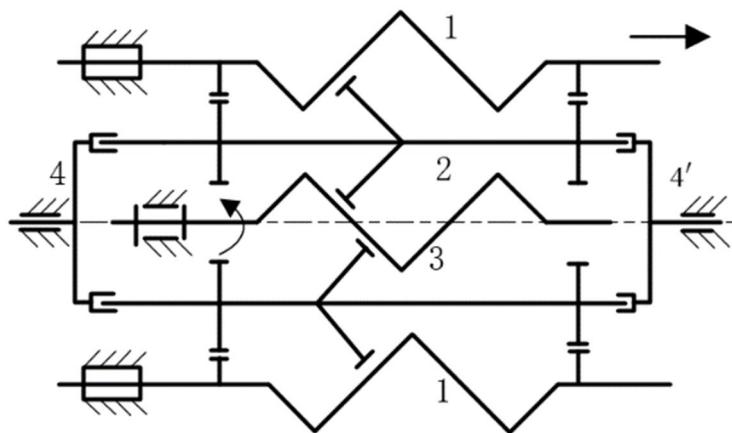
图 2.1 行星滚柱丝杠

Fig. 2.1 Planetary roller screw

行星滚柱丝杠副的结构组成如图 2.1 (a) 所示，主要有主丝杠、滚柱、螺母、内齿圈、挡圈等构件组成。行星滚柱丝杠副工作原理类似于行星齿轮结构，即由电机带动旋转的主丝杠，主丝杠与滚柱通过螺旋副啮合、滚柱与螺母也通过螺旋副啮合，利用摩擦转矩驱动将主丝杠的旋转运动转化为螺母的直线运动。其中，主丝杠作为驱动结构，与环绕在其周围的滚柱螺纹旋合，滚柱在沿螺纹轨道前行的同时通过两端直齿与安装在螺母上的内齿圈啮合不但保证滚柱围绕丝杠公转的同时实现自转，而且保证滚柱与丝杠轴线平行；螺母周向固定，在滚柱作用下做直线运动；在安装的过程中，为保证滚柱间相对位置，通过两端挡圈支撑来保证其相对位置，同时保持与螺母的轴向相对静止。

目前对于行星滚柱丝杠副机构学研究多基于将行星滚柱丝杠副机构简化成行星齿轮传动，分析过程中将行星滚柱丝杠副转化为平面机构进行分析研究，图 2.1

(b) 所示, 在分析的过程中, 将滚柱与丝杠、螺母间的空间螺旋副传动简化成了齿轮传动, 忽略了其空间机构运动的特点。为了准确反映行星滚柱丝杠副空间螺旋机构的运动特点, 本文基于空间螺旋理论构建了行星滚柱丝杠副空间机构运动简图, 并对其进行机构学分析。



注: 1—螺母, 2—滚柱, 3—主丝杠, 4—挡圈

图 2.2 行星滚柱丝杠副空间机构运动简图

Fig. 2.2 Planetary roller screw spatial mechanism motion diagram

对于行星滚柱丝杠副, 机构中所有的运动副均以运动螺旋 $\m 表示, 它们构成一个螺旋系 A , 若存在一个与螺旋系 A 中每个螺旋 $\m 均相逆的反螺旋 $\r , 这个反螺旋就是该机构的一个公共约束, 它反映了机械结构对运动部分的约束, 反螺旋的数目就是公共约束数目。

分析行星滚柱丝杠副时, 考虑机构各主要运动构件, 其运动机构简图如图 2.4 所示。考虑运动螺旋系的 Plücker 坐标, 选定主丝杠轴为坐标系 Z 轴, 找出其中运动螺旋。该机构可以简化为七个运动副, Plücker 坐标分别为:

- 丝杠—机架转动副: $\$_1 : (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ c_1)$
- 螺母—机架移动副: $\$_2 : (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ c_2)$
- 丝杠—滚柱螺旋副: $\$_3 : (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ c_3)$
- 滚柱—螺母螺旋副: $\$_4 : (0 \ 0 \ 1; a_4 \ b_4 \ c_4)$
- 滚柱—内齿圈齿轮副: $\$_5 : (0 \ 0 \ 1; a_5 \ b_5 \ c_5)$
- 滚柱—挡圈转动副: $\$_6 : (0 \ 0 \ 1; a_6 \ b_6 \ c_6)$
- 挡圈—机架圆柱副: $\$_7 : (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ c_7)$

其中, a_i, b_i 为不同的实数, 并且在机构运行过程中 a_i, b_i 的数值发生变化; c_i 为相同的实数, 即丝杠、滚柱、螺母三者节距 h 相等。由于 7 个运动螺旋的 Plücker

坐标中的第一、第二个元素恒为零，与位形变化无关；丝杠、滚柱、螺母三者节距 h 相等，利用观察法，螺旋系 A 的公共反螺旋有 3 个： $\$_{11}^r : (0\ 0\ 0; 1\ 0\ 0)$ ， $\$_{12}^r : (0\ 0\ 0; 0\ 1\ 0)$ ， $\$_{13}^r : (0\ 0\ 1; 0\ 0\ -c)$ 。机构运动螺旋系有 3 个反螺旋，即机构有 3 个公共约束， $\lambda = 3$ ，机构的阶数为 $d = 6 - \lambda = 3$ 。对于机构中的冗余自由度，可以看出滚柱与内齿圈齿轮副属于虚约束多余自由度，即机构冗余自由度 $\nu = 1$ ，局部自由度 $\zeta = 0$ 。无论机构在何种位形下其反螺旋，即公共约束不发生变化，并且其冗余约束也不发生变化，所以自由度不是瞬时的，是连续的。

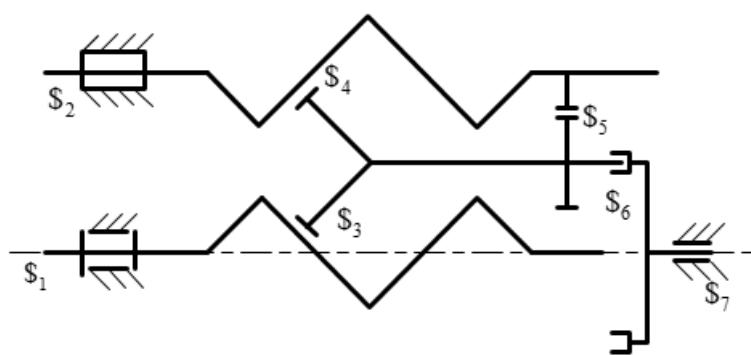


图 2.4 行星滚柱丝杠副机构简图

Fig. 2.4 Planetary roller screw mechanism schematic diagram

对于机构自由度计算，应用修正的 G-K 公式已成功解决诸多疑难结构的自由度计算问题：

$$M = d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu - \zeta \quad (2.3)$$

式中：M 为机构自由度；d 为机构的阶数；n 为含机架在内的构件数；g 为运动副数； f_i 为第 i 个运动副的自由度； ν 为冗余约束的数目； ζ 为局部自由度。其中， $d = 6 - \lambda$ ， λ 为机构的公共约束数。

该机构的自由度为

$$\begin{aligned} M &= d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu - \zeta \\ &= 3 \times (5-7-1) + (1 \times 5 + 2 \times 2) + 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

系统自由度为 1，从数理层面上论证了行星滚柱丝杠副机构工作原理的合理性，即行星滚柱丝杠副实现由丝杠输入旋转运动转化为螺母输出的单一的直线运动。

2.3 行星滚柱丝杠副参数分析

2.3.1 行星滚柱丝杠副结构参数

行星滚柱丝杠副主要有主丝杠、滚柱、螺母、内齿圈、行星架等构件组成，

在整个行星滚柱丝杠副设计的过程中，必须保证主丝杠与滚柱、滚柱与螺母、滚柱齿与内齿圈之间的参数匹配成功，才能保证整个传动装置的平稳传动。为保证传动比固定为常数，由行星滚柱丝杠副的工作原理及几何条件知，主丝杠、滚柱、螺母的螺旋方向必须相同且升角一致^[47]，滚柱与内齿圈间以固定的传动比啮合。

$$\beta_s = \beta_r = \beta_n \quad (2.4)$$

式中， β_s ， β_r ， β_n 分别表示主丝杠（Screw）、滚柱（Roller）、螺母（Nut）的螺旋升角。

由各构件间几何关系知：

$$d_n = d_s + 2d_r \quad (2.5)$$

式中， d_n ， d_s ， d_r 分别表示主丝杠、滚柱、螺母的螺纹中径。

根据螺旋传动各构件关系知：

$$P_s = P_r = P_n \quad (2.6)$$

式中， P_s ， P_r ， P_n 分别表示主丝杠、滚柱、螺母的螺距。

滚柱、螺母、丝杠间做类行星运动，在设计行星滚柱丝杠副的过程中，各构件间应满足同心条件。

滚柱中心与螺母中心间距离：

$$a_{rn} = \frac{d_n - d_r}{2} \quad (2.7)$$

滚柱中心与丝杠中心之间距离：

$$a_{rs} = \frac{d_s + d_r}{2} \quad (2.8)$$

其中， $a_{rs} = a_{rn}$

即：

$$\frac{d_n - d_r}{2} = \frac{d_s + d_r}{2} \quad (2.9)$$

$$\frac{d_n}{d_r} = \frac{d_s}{d_r} + 2 \quad (2.10)$$

滚柱的安装需要满足周向均布且不相互干涉，即：

$$(d_r + d_s) \sin\left(\frac{\pi}{N_r}\right) > D_r \quad (2.11)$$

式中， N_r 表示滚柱个数， D_r 表示滚柱外径。

$$N_r < \frac{\pi}{\arcsin(D_r / (d_r + d_s))} \quad (2.12)$$

2.3.2 行星滚柱丝杠副工作参数

行星滚柱丝杠副为类行星传动，根据设计要求，确定主丝杠、螺母、滚柱的

螺纹中径、头数、螺距等参数，滚柱端齿与内齿圈啮合，在保证滚柱轴线始终保持与主丝杠轴线平行的同时，使丝杠与滚柱、滚柱与螺母间保持较好的接触，且滚柱端齿与内齿圈之间纯滚动，保证了滚珠与螺母间无相对轴向位移。

图 2.2 所示行星滚柱丝杠副机构简图为一类行星机构。其中，主丝杠、滚柱、内齿圈这一类行星机构传动比为

$$i_{SN}^K = \frac{\omega_s - \omega_K}{\omega_R - \omega_K} = -\frac{d_R \cdot z_N}{d_S \cdot z_R} \quad (2.13)$$

式中， i_{SN}^K 表示主丝杠、螺母相对挡圈的传动比， ω_s ， ω_N ， ω_K 分别表示主丝杠、螺母、挡圈的转速。

行星滚柱丝杠副机构将丝杠的旋转运动转化为螺母的直线运动，即螺母沿轴向作直线往复运动， $\omega_N=0$ 。

对于主丝杠、滚柱端齿、内齿圈这一类行星机构，主丝杠等效为太阳轮，滚柱端齿为行星轮，挡圈起行星架的作用，内齿圈周向固定。此时

$$i_{SN}^{K^*} = \frac{\omega_s - \omega_{K^*}}{\omega_R - \omega_{K^*}} = -\frac{z_R \cdot z_N}{z_S \cdot z_R} = -\frac{d_N}{d_S} \quad (2.14)$$

在行星滚柱丝杠副简化为类行星传动中： $i_{SN}^K = i_{SN}^{K^*}$ ， $\omega_K = \omega_{K^*}$

综上 (2.13) - (2.14)，得出内齿圈与滚柱端齿齿数之间的关系

$$\frac{z_N}{z_R} = \frac{d_S}{d_R} + 2 \quad (2.15)$$

式中， z_N 表示内齿圈齿数， z_R 表示滚柱端齿齿数。

图 2.5 所示，在行星滚柱丝杠副运动过程中，主丝杠转动，滚柱既绕着主丝杠做公转运动，又绕着自身轴线做自转运动，螺母周向固定，在滚柱螺纹的作用下，滚柱和螺母沿轴线方向做直线往复运动，在主丝杠旋转一周时，滚柱与螺母沿轴线移动一个导程的位移，并且两者之间无相对位移。

图 2.5 中， ω_s 表示丝杠角速度， ω_R 表示滚柱公转角速度， ω_r 表示滚柱自转角速度。

① 滚柱和螺母间的相对轴向位移：

$$S_{rn} = \frac{\omega_R}{\omega_s} n_N p_N - \frac{\omega_r}{\omega_s} n_R p_R \quad (2.16)$$

其中 $n_R = 1$ ， $p_R = p_N = p_s$ 。

在行星滚柱丝杠副运动过程中，滚柱与螺母间无轴向相对位移，即：

$$S_{rn} = \frac{\omega_R}{\omega_s} n_N p_N - \frac{\omega_r}{\omega_s} n_R p_R = 0 \quad (2.17)$$

得出：

$$n_N = \frac{\omega_r}{\omega_R} = \frac{d_N}{d_r} = \frac{Z_N}{Z_r} \quad (2.18)$$

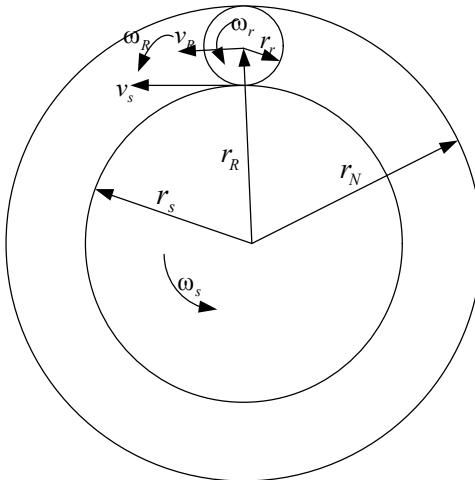


图 2.5 行星滚柱丝杠副运动关系简图

Fig. 2.5 Planetary roller screw mechanism schematic diagram

② 滚柱与丝杠间相对轴向位移：

$$S_{rn} = \frac{\omega_r}{\omega_s} n_R p - \frac{\omega_R}{\omega_s} n_s p + n_s p \quad (2.19)$$

当滚柱绕丝杠旋转一周，其相对丝杠轴向位移为：

$$S_{rs} = n_s p \quad (2.20)$$

因此，

$$n_s = \frac{\omega_r}{\omega_R} = n_N \quad (2.21)$$

综合式 (2.15)、(2.18) 得

$$n_s = n_N = \frac{d_s}{d_R} + 2 \quad (2.22)$$

式中， n_s 表示主丝杠的螺纹头数， n_N 表示螺母的螺纹头数

2.3.3 行星滚柱丝杠副装配参数

在行星滚柱丝杠副装配过程中，首先应考虑行星滚柱丝杠副设计与加工过程中滚柱与螺母间相位的影响，在设计过程中考虑滚柱螺纹与滚柱端齿间的相位关系，以及安装在螺母上的内齿圈内齿相位与螺母的螺纹间相位关系。图 2.6 所示。

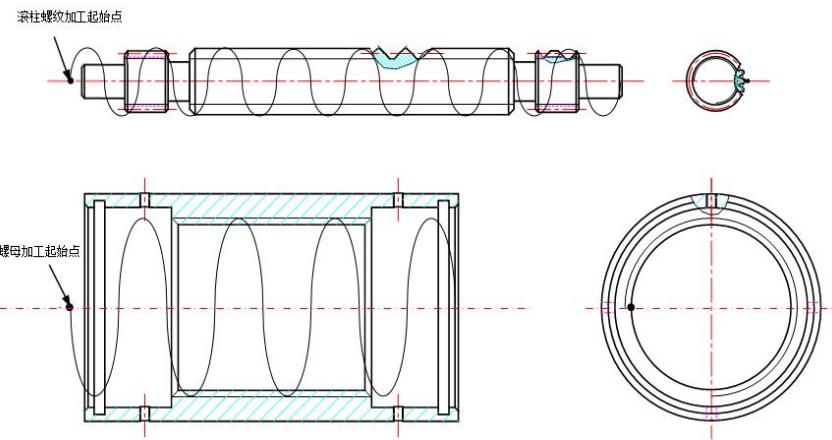


图 2.6 滚柱和螺母螺纹相位示意图

Fig2.6 Roller and nut thread phase diagram

考虑行星滚柱丝杠副结构与工作原理，在进行行星滚柱丝杠副装配时，充分考虑滚柱既有公转又有自转的特性。滚柱个数为 N_r ，则滚柱间夹角为 $\phi_r = 2\pi/N_r$ ，滚柱间夹角可以通过两端的挡圈来保持。当一个滚柱转到相邻的滚柱位置时，除了公转 ϕ_r 角外，同时产生自转角 φ_r ，滚柱自转角 $\varphi_r = n_s \phi_{ri}$ (n_s 为丝杠的螺纹头数， ϕ_{ri} 为第一个滚柱转到第 i 个滚柱需要的公转角度)。

在行星滚柱丝杠副装配过程中，根据设计图纸将内齿圈按照相位要求固定在螺母两端内齿圈安装槽内，在行星滚柱丝杠副中，滚柱由挡圈支撑均布于丝杠四周，为了更好地支撑各滚柱，应先将一端挡圈装好，按照给出的滚柱公转与自转角度依次装配好 N_r 个滚柱，然后将另一端支撑架和挡圈装好，最后完成主丝杠的安装。

安装滚柱时，应充分考虑滚柱与螺母间的相位问题，设起始处滚柱为 1 号滚柱，公转与自转角度均为 0，则 N_r 各滚柱在装配时对应的公转角度与自转角度如表 2.1 所示。

表 2.1 滚柱安装相位角

Table 2.1 Roller installation phase angle

滚柱序号	公转角度	自转角度
1	0	0
2	$2\pi/N_r$	$2n_s\pi/N_r$
⋮	⋮	⋮
$N_r - 1$	$2\pi(N_r - 2)/N_r$	$2\pi n_s(N_r - 2)/N_r$
N_r	$2\pi(N_r - 1)/N_r$	$2\pi n_s(N_r - 1)/N_r$

2.4 小结

本章探讨了行星滚柱丝杠副的工作原理，基于空间螺旋理论，给出了行星滚柱丝杠副空间机构运动简图，从机构学出发，在数理层面上论证了其运动原理的合理性。针对行星滚柱丝杠副各构件间的相互关系，结合丝杠与滚柱、滚柱与螺母、滚柱端齿与内齿圈间结构参数匹配，推导出了关键构件间的结构参数关系。基于行星滚柱丝杠副的类行星传动特点，结合设计要求，确定了主丝杠、螺母、滚柱的螺纹中径、头数、螺距等参数关系。行星滚柱丝杠副传动过程中滚柱同时与丝杠和螺母螺旋啮合，同时滚柱既有螺纹又有端齿，在设计时需充分考虑其相位关系，文中进行了装配参数的理论研究，并给出了设计与加工时滚柱螺纹与端齿以及滚柱与螺母间的相位关系，为后期行星滚柱丝杠副的设计与分析提供了理论依据。

3 行星滚柱丝杠副运动分析

3.1 引言

行星滚柱丝杠副运动过程中，通过螺纹接触对间的螺旋传动，将主丝杠的旋转运动，转化为螺母构建的直线运动。机构通过主丝杠与滚柱、滚柱与螺母间的螺纹牙传递运动，同时滚柱端齿与固定在螺母上的内齿圈啮合，保证了滚柱在传动过程中轴线始终平行于丝杠轴线，在设计的过程中，应尽量保证滚柱螺纹接触半径与滚柱端齿啮合半径一致，螺母螺纹的接触半径与内齿圈啮合半径一致。本章将对行星滚柱丝杠副的各构件间的运动关系进行分析，利用 ADAMS 软件建立行星滚柱丝杠副虚拟样机，进行运动仿真分析，验证行星滚柱丝杠机构运动学特性。

3.2 行星滚柱丝杠副的运动关系

在行星滚柱丝杠副运动过程中，滚柱与主丝杠和螺母滚动接触，通过螺纹接触对来传递载荷，同时滚柱端齿与内齿圈啮合，保证了运动的平稳性。就单个滚柱而言，机构运动过程中，滚柱在绕自身轴线作旋转运动，同时绕主丝杠的轴线作螺旋运动（绕主丝杠轴线作圆周运动和沿轴线方向的直线运动）。当滚柱螺纹中径与滚柱端齿节圆直径、螺母中径与内齿圈节圆直径相同时，滚柱与内齿圈之间纯滚动。

对于螺旋传动，根据螺旋副的导程、驱动角速度 ω_d 、驱动力矩 M_d 以及传动效率 η 来定义螺母沿轴向进给速度 v 和轴向力 Q ，如下：

$$v = L \cdot \frac{\omega_d}{2\pi} \quad (3.1)$$

$$Q = M_d \cdot 2\pi \cdot \eta / L \quad (3.2)$$

对于行星滚柱丝杠副， L_s 表示主丝杠的导程， L_r 表示滚柱丝杠导程， L_n 表示螺母的导程。

其中， $L_s = n_s \cdot p$ ， $L_r = n_r \cdot p$ ， $L_n = n_n \cdot p$ 。

当考虑两个构件 A 与 B 做螺旋运动，同时 A、B 均相对机架运动，此时计算整个系统的轴向运动线速度时，应考虑 A、B 间的相对速度，即：

$$v = L_A \cdot \frac{\omega_{AO}}{2\pi} - L_B \cdot \frac{\omega_{BO}}{2\pi} \quad (3.3)$$

3.2.1 纯滚动条件下运动分析

当行星滚柱丝杠副螺母与滚柱间为纯滚动状态时，分析行星滚柱丝杠副的各构件间的运动关系，如图 3.1 所示，其中 R-N、R-S 分别表示滚柱与螺母、滚柱

与丝杠的接触点, ω_R 、 ω_r 、 ω_s 分别表示滚柱的公转角速度、滚柱的自转角速度、丝杠转动角速度。

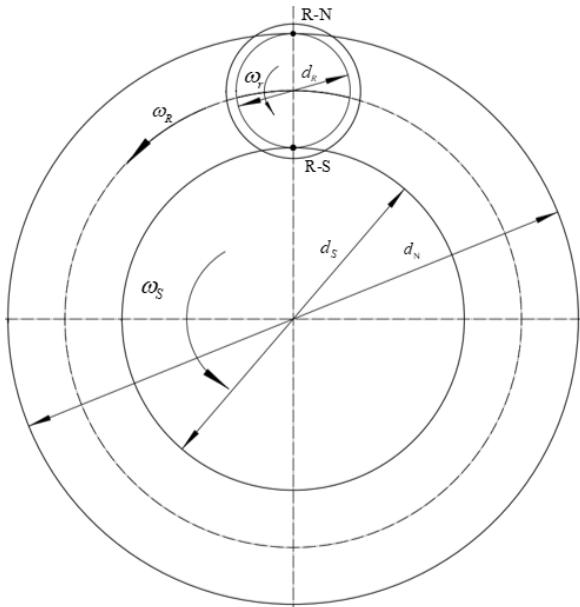


图 3.1 行星滚柱丝杠角速度关系图

Fig. 3.1 The PRS angular velocity diagram

行星滚柱丝杠副中螺旋传动可分为两部分：滚柱与丝杠、滚柱与螺母。设固定机架为 O , 当挡圈相对机架周向固定时, 螺母沿轴向运动的线速度可表示为:

$$v_{NO} = (L_S \cdot \frac{\omega_{SO}}{2\pi} - L_{RS} \cdot \frac{\omega_{RO}}{2\pi}) + (L_{RN} \cdot \frac{\omega_{RO}}{2\pi} - L_N \cdot \frac{\omega_{NO}}{2\pi}) \quad (3.4)$$

式中, v_{NO} 表示螺母直线运动速度; L_{RS} 表示滚柱—丝杠副的导程; L_{RN} 表示滚柱—螺母副的导程; ω_{SO} 表示丝杠相对机架角速度; ω_{RO} 表示滚柱相对机架角速度; ω_{NO} 表示螺母相对机架角速度。

行星滚柱丝杠副运动过程中, 挡圈沿轴向并不是固定的, 考虑其绕丝杠轴线转动, 此时, 式 (3.4) 可化为:

$$v_{NO} = (L_S \cdot \frac{\omega_{SK}}{2\pi} - L_{RS} \cdot \frac{\omega_{RK}}{2\pi}) + (L_{RN} \cdot \frac{\omega_{RK}}{2\pi} - L_N \cdot \frac{\omega_{NK}}{2\pi}) \quad (3.5)$$

式中, ω_{SK} 表示丝杠相对于挡圈转动的角速度; ω_{RK} 表示滚柱相对于挡圈转动的角速度; ω_{NK} 表示螺母相对于挡圈转动的角速度。

而相对速度可以通过各构件的绝对角速度来计算:

$$\omega_{SK} = \omega_{SO} - \omega_{KO} \quad (3.6)$$

$$\omega_{RK} = \omega_{RO} - \omega_{KO} \quad (3.7)$$

$$\omega_{NK} = \omega_{NO} - \omega_{KO} \quad (3.8)$$

对于各构件相对角速度之间的关系, 推导如下:

$$\omega_{KO} = \frac{d_N \cdot d_{RS}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{NO} + \frac{d_S \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{SO} \quad (3.9)$$

$$\omega_{NO} = \left(\frac{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S}{d_N \cdot d_{RS}} \right) \cdot \omega_{KO} - \frac{d_{RN} \cdot d_S}{d_N \cdot d_{RS}} \cdot \omega_{SO} \quad (3.10)$$

$$\omega_{SO} = \left(\frac{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S}{d_{RN} \cdot d_S} \right) \cdot \omega_{KO} - \frac{d_N \cdot d_{RS}}{d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{NO} \quad (3.11)$$

$$\omega_{RO} = \left(\frac{d_{RN} - d_N}{d_{RN}} \right) \cdot \omega_{KO} + \frac{d_N}{d_{RN}} \cdot \omega_{NO} \quad (3.12)$$

综合上述推导公式，螺母沿轴向方向运动线速度可表示为：

$$v_{NO} = L \cdot \frac{\omega_{SO}}{2\pi} \quad (3.13)$$

式中， L 表示所求得的当量导程。

在推导行星滚柱丝杠副结构参数时，给出了丝杠、滚柱、螺母具有相同的螺距($p_s = p_n = p_r = p$)，且滚柱螺纹为单头螺纹，丝杠与螺母螺纹头数相同($n_s = n_n$)。

运动过程中，螺母周向固定，则 $\omega_{NO}=0$ ，因此，挡圈相对机架的角速度为：

$$\omega_{KO} = \frac{d_S \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{SO} \quad (3.14)$$

则各构件相对挡圈的角速度为：

$$\omega_{NK} = -\omega_{KO} = -\frac{d_S \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{SO} \quad (3.15)$$

$$\omega_{SK} = \omega_{SO} - \omega_{KO} = \frac{d_N \cdot d_{RS}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{SO} \quad (3.16)$$

$$\omega_{RK} = \omega_{RO} - \omega_{KO} = -\frac{d_N \cdot d_S}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \cdot \omega_{SO} \quad (3.17)$$

此时，螺母沿轴向直线运动的线速度为：

$$v_{NO} = \left\{ \begin{array}{l} \left(L_s \cdot \frac{d_N \cdot d_{RS}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} - L_{RS} \cdot \frac{-d_N \cdot d_S}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \right) \\ + \left(L_{RN} \cdot \frac{-d_N \cdot d_S}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} - L_n \cdot \frac{-d_S \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \right) \end{array} \right\} \cdot \frac{\omega_{SO}}{2\pi} \quad (3.18)$$

式中， $L_{RS} = n_{RS} \cdot p = n_{RN} \cdot p = L_{RN}$ ； $L_s = n_s \cdot p = n_n \cdot p = L_n$

则

$$\begin{aligned} L &= n_s \cdot p \cdot \frac{d_N \cdot d_{RS}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} - n_n \cdot p \cdot \frac{-d_S \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_S} \\ &= n_s \cdot p \end{aligned} \quad (3.19)$$

即行星滚柱丝杠副运动过程中螺母轴向直线运动速度为：

$$v_{NO} = n_s \cdot p \cdot \frac{\omega_{SO}}{2\pi} \quad (3.20)$$

3.2.2 滚滑条件下运动分析

以上公式的推导过程，考虑到滚柱端齿与内齿圈啮合限制了滚柱与螺母间的滑动，但是制造、安装误差仍有可能使滚柱与螺母间发生滑动，这些都会降低挡圈的角速度，甚至影响整个系统的正常运行。图 3.2 所示，虚线表示滚柱与螺母的螺纹接触，实线表示滚柱端齿与内齿圈的啮合点所在线。图中， θ_R^G 表示滚柱端齿纯滚动时转过的角度， $\omega_R^G = \dot{\theta}_R^G$ ； θ_R^r 表示滚柱与螺母间螺旋传动转过的角度， $\omega_R^r = \dot{\theta}_R^r$ ； θ_μ 表示滚柱与螺母间相对滑动角度。

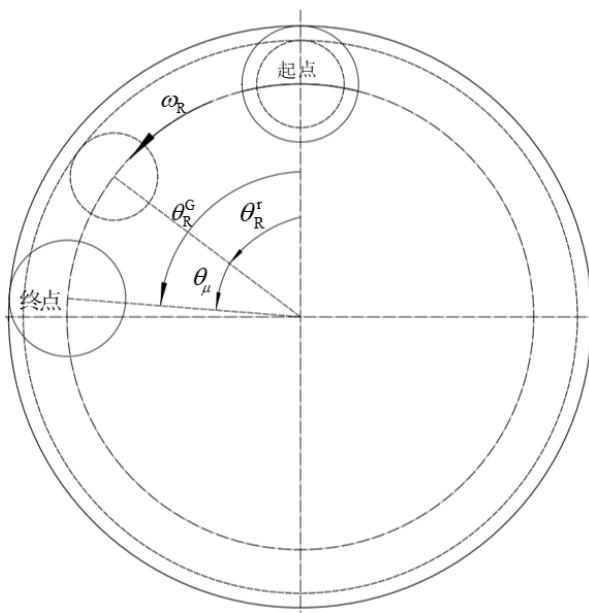


图 3.2 滚柱与螺母间存在滑动示意图

Fig. 3.2 Schematic sliding between the rollers and the nut exists

当式 (3.14) 考虑滚柱与螺母间滑动时，挡圈相对机架角速度为：

$$\omega_{KO} = \frac{d_s \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_s} \cdot \omega_{SO} - \mu \cdot \omega_{SO} \quad (3.21)$$

式中， μ 表示滑动系数。

化简式 (3.5)：

$$\begin{aligned} v_{NO} &= (L_s \cdot \frac{\omega_{SK}}{2\pi} - L_{RS} \cdot \frac{\omega_{RK}}{2\pi}) + (L_{RN} \cdot \frac{\omega_{RK}}{2\pi} - L_N \cdot \frac{\omega_{NK}}{2\pi}) \\ &= (n_s \cdot \omega_{SK} - n_N \cdot \omega_{NK}) \cdot \frac{p}{2\pi} \\ &= \left(\frac{n_s \cdot d_s \cdot d_{RN} + n_N \cdot d_N \cdot d_{RS}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_s} + n_s \cdot \mu - n_N \cdot \mu \right) \cdot \omega_{SO} \cdot \frac{p}{2\pi} \end{aligned}$$

其中， $n_s = n_N$ ，也就是说滚柱与螺母间的滑动不会影响到螺母沿轴向直线运动的速度，其速度与丝杠和螺母的螺纹头数、螺距以及主丝杠角速度成正比。

3.3 行星滚柱丝杠副实例分析

对于行星滚柱丝杠副中滚柱、丝杠、螺母三者螺纹头数的选取，原则上滚柱选取单头丝杠，丝杠与螺母螺纹头数相等，且三者旋向相同，本实例中，执行机构最高线速度可达到 2000mm/s ，丝杠最高输入转速为 $n = 5000\text{r/min}$ ，螺距取 $p = 5\text{mm}$ ，丝杠、螺母的螺纹头数为 $n_s = n_N = 5$ 。

根据前述理论推导的行星滚柱丝杠副各构件间结构参数和运动参数之间的关系式，通过计算，得到行星滚柱丝杠副基本结构参数如表 3.1 所示：

表 3.1 行星滚柱丝杠副结构参数

Table 3.1 The PRS structural parameters

参数	符号	数值
螺距/mm	p	5
滚柱个数	Z	8
丝杠中径/mm	d_s	30
丝杠大径/mm	d_{sa}	31.84
丝杠小径/mm	d_{sf}	28.08
丝杠长度/mm	l	500
滚柱中径/mm	d_r	10
滚柱大径/mm	d_{ra}	11.84
滚柱小径/mm	d_{rf}	8.08
螺母中径/mm	d_n	50
螺母大径/mm	d_{na}	51.92
螺母小径/mm	d_{nf}	48.16
螺旋升角	β	9°
接触角	α	45°

在确定行星滚柱丝杠副中丝杠、螺母、滚柱主要螺旋参数后，根据第二章推导出的相关参数公式，给出表 3.2 一组滚柱端齿和内齿圈结构参数。

表 3.2 滚柱端齿和内齿圈结构参数

Table3.2 Roller end teeth and ring gear structural parameters

参数	滚柱端齿		内齿圈	
	符号	数值	符号	数值
齿数	Z_R	20	Z_g	100
分度圆直径/mm	d_r	10	d_n	50
齿顶高/mm	h_{ra}	0.5	h_{na}	0.5
齿顶圆直径/mm	d_{ra}	11	d_{na}	49
齿根高/mm	h_{rf}	0.625	h_{nf}	0.625
齿根圆直径/mm	d_{rf}	8.75	d_{nf}	51.25
压力角	φ	20	φ	20
齿宽/mm	B	8	B	10

在实际工作过程中，丝杠作为输入构件，其角速度已知，当选取丝杠输入角速度为 $\omega_s = 20 \text{ rad/s}$ 时，根据上述行星滚柱丝杠副各构件的结构参数和运动关系公式，即可求得各构件间的运动关系。

其中，行星滚柱丝杠副在作类行星运动的过程中，挡圈起到行星架作用，其相对于机架的角速度即为滚柱的公转角速度 ω_R ，即：

$$\omega_R = \omega_{KO} = \frac{d_s \cdot d_{RN}}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_s} \cdot \omega_{SO} = \frac{30 \times 10}{50 \times 10 + 10 \times 30} \times 20 = 7.5 \text{ rad/s}$$

行星滚柱丝杠副在作类行星运动的过程中，滚柱的自转速度 ω_r 即滚柱相对挡圈转动的角速度 ω_{RK} ，即

$$\omega_r = \omega_{RK} = -\frac{d_N \cdot d_s}{d_N \cdot d_{RS} + d_{RN} \cdot d_s} \cdot \omega_{SO} = -\frac{50 \times 30}{50 \times 10 + 10 \times 30} \times 20 = -37.5 \text{ rad/s}$$

螺母作直线运动的线速度 v_N 为

$$v_N = v_{NO} = n_s \cdot p \cdot \frac{\omega_{SO}}{2\pi} = 5 \times 5 \times \frac{20}{2\pi} = 79.6 \text{ mm/s}$$

3.4 虚拟样机分析

本文中对行星滚柱丝杠副这一复杂机械系统进行运动学分析，可以利用 Pro/E 完成三维实体模型的建立和总体装配，利用 ADAMS 建立虚拟样机，通过对虚拟样机进行运动学仿真分析，验证前期理论推导的正确性，并且针对分析过程中出现的问题进行优化设计，提高行星滚柱丝杠副的各项性能。

利用 ADAMS 做行星滚柱丝杠副的运动学分析，其技术路线如图 3.3 所示：

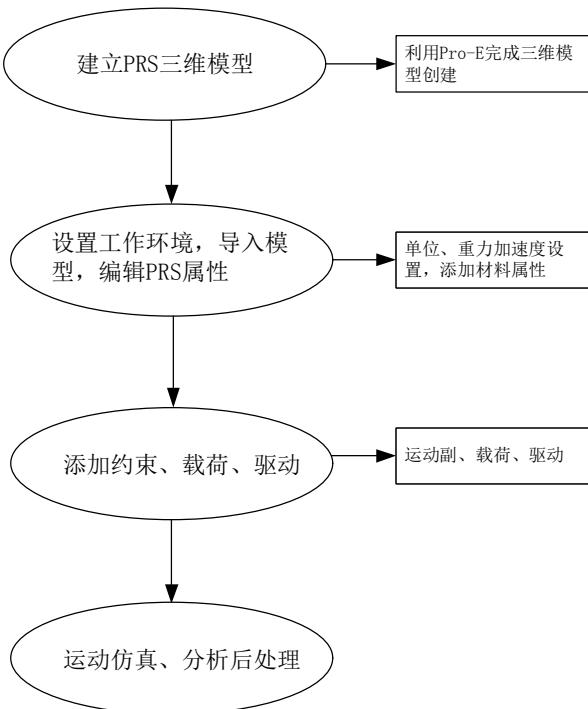


图 3.3 行星滚柱丝杠副运动学仿真技术路线图

Fig. 3.3 The PRS kinematics simulation technology roadmap

3.4.1 虚拟样机

根据表 3.1、表 3.2 中给出的行星滚柱丝杠副各构件参数，在 Pro-E 中完成三维建模，在对行星滚柱丝杠副进行运动学分析时，考虑其各滚柱均布，各滚柱运动过程完全相同，为减少分析计算过程中的资源占用问题，本次分析对其中一个滚柱进行分析。

①建立 PRS 三维模型

- 1) 根据本文设计实例中各构件的参数，利用 Pro-E 建立各构件三维模型；
- 2) 简化一些不必要的几何特征，如圆角、倒角等；
- 3) 在 Pro-E 中完成 PRS 模型的装配。

②设置工作环境，导入模型，编辑 PRS 属性

- 1) 本文中单位制取 mmks，即毫米、千克、秒，添加重力加速度；
- 2) 导入 Pro-E 中建立的实体模型；
- 3) 为 PRS 中各构件添加材料属性，采用不同颜色渲染各构件。

③添加约束、载荷、驱动

- 1) 机架以大地（ground）代替，根据各构件间的运动关系分别添加运动副，

其中，

- 转动副：丝杠与大地，挡板与滚柱，挡板与螺母；
- 移动副：螺母与大地；
- 固定副：螺母与内齿圈；
- 螺旋副：滚柱与丝杠，滚柱与螺母；
- 齿轮副：滚柱与内齿圈；
- 2) 沿螺母轴向添加载荷；
- 3) 将驱动添加到丝杠与大地间的转动副上，并设定驱动速度。

④运动仿真、分析后处理

- 1) 设置仿真时间与步数，进行运动学仿真；
- 2) 通过 Post process 进行后处理

在 Pro-E 中完成三维实体模型的建立和总体装配，并完成干涉检测（图 3.4 所示）。

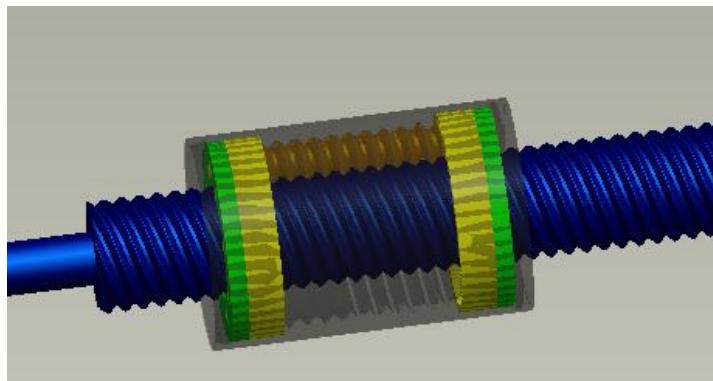


图 3.4 行星滚柱丝杠副装配模型

Fig. 3.4 The PRS assembly model

将装配模型保存为 igs 格式，导入到 ADAMS 中，依据 3.4.1 节的仿真分析技术路线进行行星滚柱丝杠副工作环境及各构件属性设置，并根据各构件间的运动关系完成运动副的创建。完成各项设置后的行星滚柱丝杠副运动学模型如图 3.5 所示。

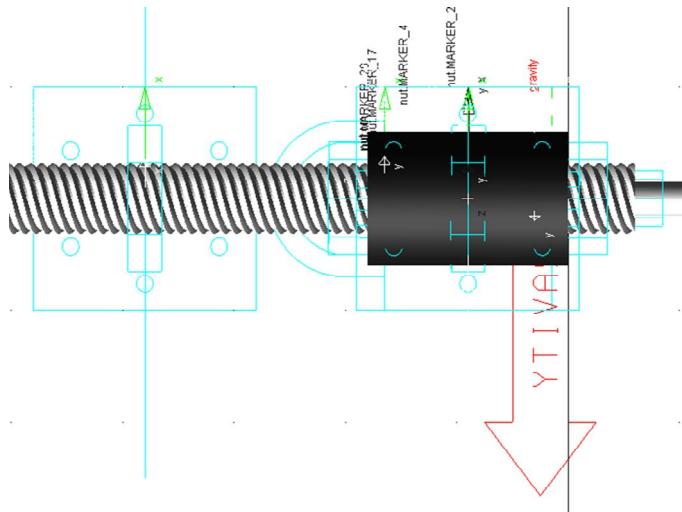


图 3.5 行星滚柱丝杠副运动学分析模型

Fig. 3.5 The PRS kinematic analysis model

3.4.3 仿真结果分析

图 3.6 所示为螺母 (nut) 在空间坐标系 X、Y、Z 轴上的位移和在 Y 轴方向上的速度曲线图，在运动过程中，螺母重心在 X、Z 轴上未发生变化，这从图中也得到了验证。螺母沿着 Y 轴方向上做直线运动，且在 2 秒后保持匀速运动。

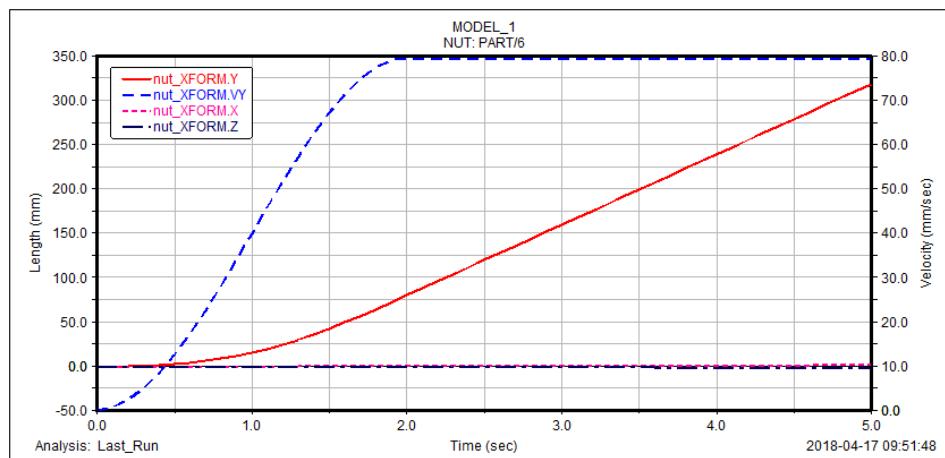


图 3.6 螺母位移、Y 轴方向速度曲线图

Fig. 3.6 Nut displacement and Y-axis velocity profile

图 3.7 所示为滚柱和螺母在 Y 轴上的位移、速度曲线图，分析图中数据可以看出，在 Y 轴方向上，滚柱与螺母运动相对静止，即滚柱与螺母在运动过程中，沿轴线方向上保持同速，验证了理论推导解析公式的正确性。

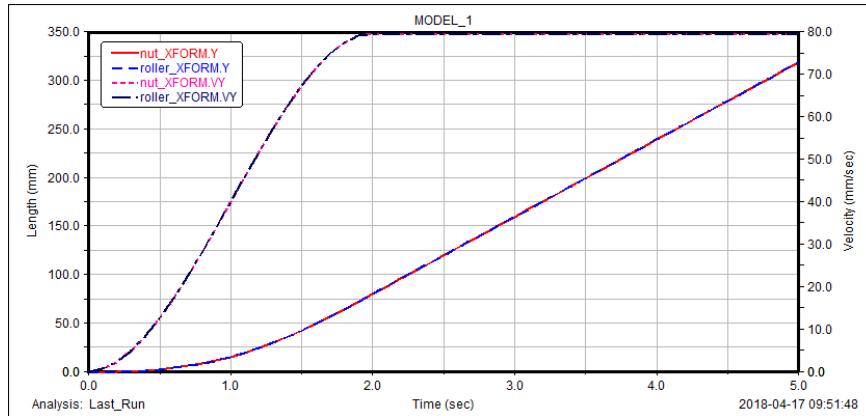


图 3.7 滚柱和螺母 Y 轴方向位移、速度曲线图

Fig. 3.7 Roller and nut Y-axis direction displacement, velocity profile

3.5 小结

本章进行了行星滚柱丝杠副运动过程中各构件间运动关系理论研究，推导出了各运动构件间的速度关系解析公式；分别讨论了滚柱与螺母间纯滚动和存在滑动两种工况下对螺母轴向运动速度的影响，得出滚柱与螺母间的滑动不会影响到螺母沿轴向直线运动的速度，其速度与丝杠和螺母的螺纹头数、螺距以及主丝杠角速度成正比。通过 Pro-e 建立行星滚柱丝杠副三维模型，利用 ADAMS 建立虚拟样机，并进行运动仿真分析，得到各构件的速度及位移曲线图，验证了理论推导的正确性。

4 行星滚柱丝杠副接触分析

4.1 引言

工程应用中对于行星滚柱丝杠副的使用多基于其高承载、体积小、高精度等优点，在行星滚柱丝杠副工作过程中，依靠滚柱与丝杠、滚柱与螺母间的螺纹接触对来传递力，因此要考察其承载能力，首先应分析接触对受力的应力分布情况。理想工作状态，期望行星滚柱丝杠副各螺纹接触对承受均等的力，即载荷在各接触对间均布，无应力集中现象产生。但实际工作中，不可能所有接触对均处于理想的接触区，此时处于最恶劣条件下的接触对的载荷分布状况将决定整个系统的承载能力。因此，可以从单对接触对分析出发，对行星滚柱丝杠副承载特性进行研究。

本章基于赫兹接触理论建立行星滚柱丝杠副滚柱与丝杠间的弹性接触模型，分析其进入屈服状态的临界条件，理论推导的过程中，不考虑螺纹制造和安装误差的影响。利用推导的解析计算公式，进行实例计算分析，通过简化接触对模型，利用 ANSYS 进行有限元分析，验证理论分析的正确性。

4.2 接触分析

影响行星滚柱丝杠副承载性能的因素很多，其中滚柱与丝杠、滚柱与螺母间的螺纹接触对的接触特性对行星滚柱丝杠副承载性能起到非常关键的作用，行星滚柱丝杠副工作时承受轴向载荷，此时滚柱与丝杠、滚柱与螺母间螺纹接触对接触点处会产生接触变形，这将会直接影响系统的轴向刚度和承载性能。行星滚柱丝杠副中，螺纹接触对间为点一面接触，即作用于接触对间的载荷在两者间仅形成很小的接触区域，因此在接触分析过程中，应优先考虑滚动表面的破坏。在弹性范围内，赫兹理论能够很好地解决滚动体表面的接触分析问题。

4.2.1 Hertz 接触理论

① 赫兹接触理论

Hertz 接触理论通过完全弹性力的静态接触条件给出的，一般根据其进行曲面接触应力场和弹性变形的计算分析。

关于弹性体的接触问题，赫兹接触理论为其提供了许多经典的解法^[49]。

对于赫兹接触理论的应用包含几点假设：

- 1) 接触表面光滑和均质的；2) 接触区域的变形是小变形的，且只有弹性变形存在；3) 不考虑接触表面的介质和动摩擦的影响；4) 接触压力垂直于接触界面。

②接触应力

具有一定曲面的两物体在压力作用下相互接触时，理论上为点接触或者线接触，如齿轮、凸轮等工作中，通过点接触或者线接触传递运动和动力。考虑到弹性变形时，实际接触区域为很小的面接触，并产生较大的接触应力，即赫兹应力。

对于点接触，由弹性力学可知，当两个半径为 R_1, R_2 的球体在力 F 的作用下接触时，接触面为微圆面（半径为 a ），最大压应力 σ_{\max} 出现在圆的中心处^[49]。

由赫兹公式得：

$$\sigma_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad (4.1)$$

但是对于一般接触曲面问题，在其接触点区域会产生局部变形，实际接触区形成一个小的椭圆性平面，椭圆的长半轴在 X 轴上，短半轴 b 在 Y 轴上，椭圆形接触面上各点压应力大小与材料的变形量有关，Z 轴上的变形量大，最大接触应力 σ_{\max} 出现在椭圆中心处。

由赫兹公式得：

$$\sigma_{\max} = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (4.2)$$

式中， a 、 b 分别表示接触椭圆的长半轴和短半轴

4.2.2 点接触螺纹接触对接触强度理论研究

当行星滚柱丝杠副在承受轴向工作载荷时，滚柱与丝杠和螺母螺纹啮合处产生的接触变形，将在一定程度上影响到行星滚柱丝杠副轴向接触刚度。而在一定条件下，赫兹理论能够解决对于滚动体表面接触问题的分析。

要对行星滚柱丝杠副承载能力整体进行分析，鉴于其接触对较多，本文将以滚柱与丝杠单对接触模型为研究对象，以此来预估系统的接触特性。在分析单对滚柱与丝杠螺纹接触对时，所设计的滚柱螺纹面为半圆弧，与丝杠螺纹面接触可等效为曲面与弹性半空间的接触对，图 4.1 所示。

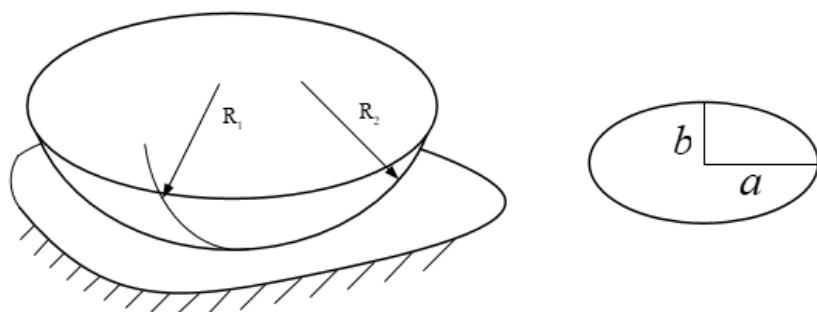


图 4.1 曲面与弹性半空间接触

Fig. 4.1 Surface contact with elastic half space

由赫兹接触理论可知，在两曲面点接触情况下通常会产生椭圆形接触区。此时，可以构想两个任意形状的物体接触时都可以表示为接触点处的椭圆体接触，图 4.2 所示。

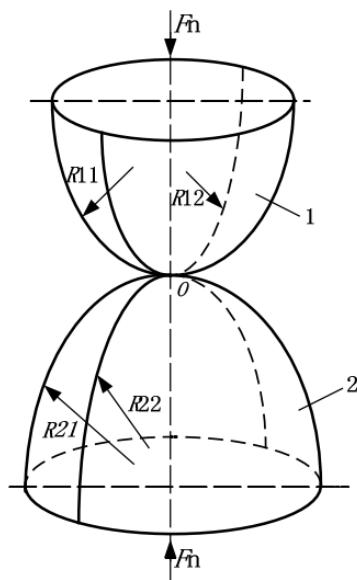


图 4.2 两椭圆体接触

Fig. 4.2 Contact of two ellipsoids

两曲面在各自的两个正交主平面上接触点的主曲率半径分别为 R_{11} 、 R_{12} 、 R_{21} 、 R_{22} 。正交主平面与公切面的交线分别是坐标轴 x_1 、 y_1 和 x_2 、 y_2 ，两个坐标轴系夹角为 γ 。

在工程应用中，两个接触面的主平面是重合的，此时 γ 为 0° 或 90° 。

为方便后续公式的推导，此处引入两个常数 A 、 B ，设

$$A + B = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \quad (4.3)$$

$$B - A = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right)\left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right)\cos 2\gamma} \quad (4.4)$$

当单对接触对承受的法向接触力为 F_n ，图 4.3 所示，由式 (4-2) 可知接触区域螺纹牙的最大接触应力为：

$$\sigma_{\max} = \frac{3F_n}{2\pi ab} \quad (4.5)$$

式中： F_n 表示螺纹接触对接触点处法向接触力； a 、 b 分别表示接触椭圆的长半轴和短半轴。

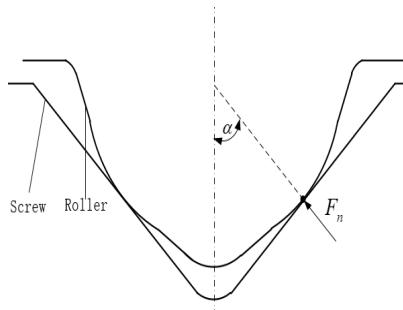


图 4.3 单个接触对受力分析

Fig4.3 Individual contact force analysis

工程应用中，接触椭圆的长短半轴可以利用如下公式求得^[51]：

$$a = k_a \sqrt[3]{\frac{3F_n}{2E^* \cdot (A+B)}} \quad (4.6)$$

$$b = k_b \sqrt[3]{\frac{3F_n}{2E^* \cdot (A+B)}} \quad (4.7)$$

式中， k_a 、 k_b 表示椭圆长、短半轴系数； E^* 表示当量弹性模量。

其中：

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} + \frac{1 - \nu_R^2}{E_R} \quad (4.8)$$

式中， E_s 、 E_R 分别表示丝杠、滚柱的弹性模量； ν_s 、 ν_R 分别表示丝杠、滚柱的泊松比。

为了求出 $A+B$ ，首先应求出两曲面在各自的两个正交主平面上接触点的主曲率半径，即 R_{11} 、 R_{12} 、 R_{21} 、 R_{22} 。

对于行星滚柱丝杠副，滚柱与丝杠接触面为圆弧面，其中，滚柱螺纹牙齿廓圆弧半径 R 为：

$$R = \frac{r_R}{\sin \alpha} \quad (4.9)$$

式中， r_R 表示滚柱螺纹中径； α 表示接触角。

丝杠接触螺纹面为直线齿廓，其齿廓半径视为无穷大。接触点位于滚柱、丝杠的螺纹中径处。

其中， R_{i1} ($i=1,2$) 可在接触对法面上量得，在行星滚柱丝杠副中的滚柱与丝杠螺纹接触对中，可以利用如下公式近似求得^[50]：

$$R_{11} = R = \frac{r_R}{\sin \alpha} \quad (4.10)$$

$$R_{21} = \infty \quad (4.11)$$

R_{i2} ($i=1,2$) 可在接触对法平面相垂直的平面上量得，在行星滚柱丝杠副中

的滚柱与丝杠螺纹接触对中，可以利用如下公式近似求得：

$$R_{12} = \frac{r_R}{\sin \alpha} \quad (4.12)$$

$$R_{22} = \frac{r_s + r_R - R \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (4.13)$$

式中， r_R 表示滚柱螺纹中径； r_s 表示丝杠螺纹中径； α 表示接触角； β 表示螺旋角。

则

$$A + B = \frac{2 \sin \alpha}{r_R} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_s + r_R - r_R \cot \alpha} \quad (4.14)$$

对于行星滚柱丝杠副，单个滚柱螺纹牙的轴向载荷为：

$$F_{ra} = n F_n \sin \alpha \cos \beta \quad (4.15)$$

式中， n 表示单个滚柱螺纹牙的个数； F_n 为单个螺纹接触对达到屈服极限的法向载荷，图 4.4 所示； α 为接触角； β 为螺旋升角。

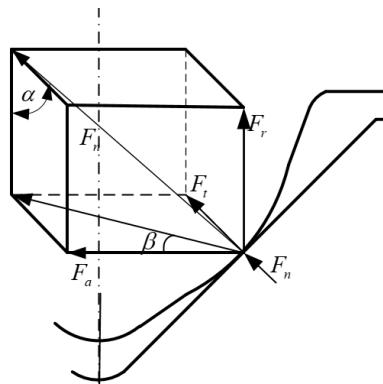


图 4.4 单个接触对受力分析图

Fig. 4.4 Individual contact force analysis diagram

根据以上条件，得出行星滚柱丝杠副单对滚柱与丝杠接触对的最大接触应力与轴向载荷之间的关系式：

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{3F_{ns}}{2\pi ab} \\ &= \frac{1}{k_a k_b} \sqrt[3]{\frac{3F_{ra}}{2\pi n \sin \alpha \cos \beta} \times \left(\pi \left(\frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_R^2}{E_R} \right) \right)^{-2} \times \left(\frac{2 \sin \alpha}{r_R} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_s + r_R - r_R \cot \alpha} \right)^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

设：

$$k_p = \frac{1}{k_a k_b} \quad (4.17)$$

$$Z_m = \left(\pi \left(\frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_R^2}{E_R} \right) \right)^{-1} \quad (4.18)$$

$$Z_\rho = \frac{2 \sin \alpha}{r_R} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_S + r_R - r_R \cot \alpha} \quad (4.19)$$

其中, Z_m 表示材料系数; Z_ρ 表示综合曲率系数; k_p 表示综合椭圆半轴系数。则

$$\sigma_H = k_p \cdot \sqrt[3]{\frac{3F_{ra}}{2\pi n \sin \alpha \cos \beta} \times Z_m^2 \times Z_\rho^2} \quad (4.20)$$

①对于综合曲率系数 k_p , 它是在考虑接触椭圆对接触应力产生影响的系数。

$$k_p = \frac{1}{k_a k_b}$$

设:

$$\cos \theta = \frac{B - A}{A + B} \quad (4.21)$$

根据 θ 可以查图 4.5 得到 k_a , k_b 。

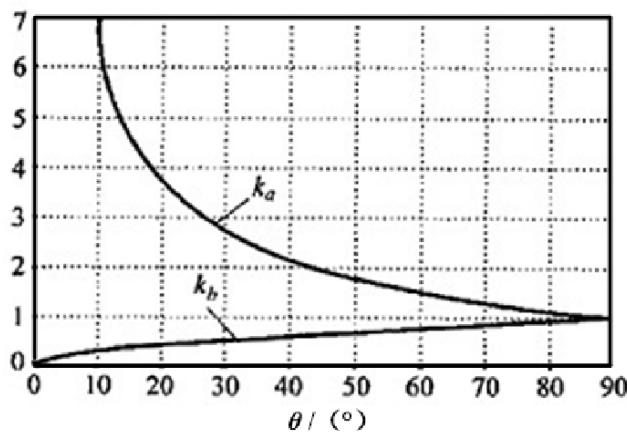


图 4.5 k_a 、 k_b 数值曲线

Fig 4.5 Numerical curves of k_a and k_b

②对于材料系数 Z_m , 它是在考虑材料物性参数对接触应力产生的影响。

$$Z_m = \left(\pi \left(\frac{1 - \nu_s^2}{E_s} + \frac{1 - \nu_r^2}{E_r} \right) \right)^{-1}$$

式中, E_s 、 E_r 分别表示丝杠、滚柱的弹性模量; ν_s 、 ν_r 分别表示丝杠、滚柱的泊松比。

③对于综合椭圆半轴系数 Z_ρ , 它是考虑接触角和螺纹螺旋升角对接触应力产生的影响。

$$Z_\rho = \frac{2 \sin \alpha}{r_R} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_S + r_R - r_R \cot \alpha}$$

式中, α 表示接触角; β 表示螺旋升角。

研究显示最大静态切应力 τ_{st} 是两弹性体在接触时产生塑性变形的主要影响因素，材料发生塑性变形的条件就是 τ_{st} 达到剪切屈服^[53]。根据 Mises 屈服准则，得出：

$$\tau_{st} = \tau_s = k_{st} \sigma_{max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

当达到屈服临界点时，所得到的最大接触应力为：

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}k_{st}} \quad (4.22)$$

式中， σ_s 是材料的拉伸屈服极限； k_{st} 是与接触椭圆参数 b/a 有关的参数，一般取 $k_{st}=0.30\sim0.325$ 。

4.2.3 考虑载荷分布不均时接触强度理论研究

行星滚柱丝杠副实际运动过程中，滚柱各螺纹牙承受的载荷并非平均的，此时，需要引入载荷分布不均系数 K_v ， K_v 表示为实际载荷与平均载荷的比值。即：

$$K_v = \frac{F_{Rx}}{F_{Rav}} \quad (4.23)$$

当不考虑行星滚柱丝杠副各滚柱间的载荷不均匀分配，则整个行星滚柱丝杠副的临界轴向载荷为：

$$F_{sx} = nF_{Rav} \quad (4.24)$$

实际工作中，施加的轴向载荷：

$$F_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^z F_{in} \sin \alpha \cos \beta \quad (4.25)$$

式中， F_{in} 表示第 i 各螺纹牙接触处所受的法向力。

分别用 A_s 、 A_r 分别表示丝杠、滚柱接触时的横截面积，则单个滚柱螺纹牙间载荷分布为：

$$F_{i-1}^2 = F_i^2 + \frac{p}{8K_v} \left(\frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_r A_r} \right) \frac{1}{n} \sum_{j=i}^z F_{jn} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (4.26)$$

当给定轴向载荷时，联立式 (4-25) 和 (4-26) 可求得单个滚柱各螺纹牙接触点处所受的法向力。

由式 (4.2) 知单个螺纹牙的接触应力为：

$$\sigma_i = \frac{3F_{in}}{2\pi ab} \quad (4.27)$$

通过对于行星滚柱丝杠副的载荷分布及分配的研究，从理论上得出了载荷分布规律，能够很好的指导对于行星滚柱丝杠副结构参数的设计，以达到行星滚柱丝杠副运动过程中载荷尽可能的均布于各个螺纹牙接触对之间。

4.3 接触变形分析

对于滚动体接触变形分析，在滚动轴承的分析方法中提出以下基本假设^[53]：1) 接触物体只产生弹性变形，并服从胡克定律；2) 负荷垂直于接触表面；3) 接触面尺寸远小于接触物体表面的曲率半径。

行星滚柱丝杠副在未施加载荷时，滚柱与丝杠、滚柱与螺母间的螺纹接触对均为点接触，当螺纹接触对承受法向载荷 F_n 时，由赫兹接触理论可知，接触点处形成椭圆形接触区域，即接触方式由点接触转化为了面接触。此时，在微小的椭圆接触区域，不同点其接触应力并不完全相同，图 4.6 所示，其中接触区域椭圆长轴在坐标系 X 轴上，短轴在 Y 轴上，椭圆中心为坐标系中心 O，其变形量沿 Z 轴方向最大，接触应力也应沿 Z 轴方向最大。

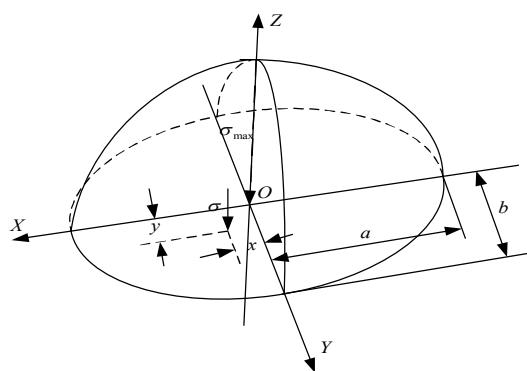


图 4.6 点接触椭圆面上压应力分布

Fig. 4.6 Point contact elastic surface stress distribution

对于两曲面在各自的两个正交主平面上接触点的主曲率半径分别为 R_{11} 、 R_{12} 、 R_{21} 、 R_{22} ，图 4.3 所示。正交主平面与公切面的交线分别是坐标轴 x_1 、 y_1 和 x_2 、 y_2 ，两个坐标轴系夹角为 γ 。在工程应用中，两个接触面的主平面是重合的，此时 γ 为 0° 或 90° 。

此时，引入曲率和 $\sum \rho$ 和主曲率函数 $F(\rho)$ 。其中，

$$\sum \rho = A + B = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \quad (4.28)$$

$$F(\rho) = \frac{B - A}{B + A} = \left| \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right| + \left| \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right| \quad (4.29)$$

对于椭圆形接触区域，最大应力出现在几何中心，其应力大小为

$$\sigma_{\max} = \frac{3F_n}{2\pi ab}$$

椭圆面上任意一点接触应力值为：

$$\sigma(x,y)=\sigma_{\max}\left(1-\frac{2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

将式 (4.5) 代入得

$$\sigma(x,y)=\frac{3F_n}{2\pi ab}\left(1-\frac{2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

其中,

$$\begin{aligned} a &= k_a \sqrt[3]{\frac{3F_n}{2E^*(A+B)}} \\ b &= k_b \sqrt[3]{\frac{3F_n}{2E^*(A+B)}} \\ A+B &= \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} = \sum \rho \end{aligned}$$

式中, k_a , k_b 表示椭圆长、短半轴系数; E^* 表示当量弹性模量。

其中:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_s^2}{E_s} + \frac{1-v_r^2}{E_r}$$

式中, E_s 、 E_r 分别表示丝杠、滚柱的弹性模量; v_s 、 v_r 分别表示丝杠、滚柱的泊松比。

对于上文提出的主曲率函数 $F(\rho)$, Harris T A 、Kotzalas M N 在研究轴承滚动接触问题时, 提出了主曲率函数 $F(\rho)$ 与椭圆参数 a 和 b 相关的函数^[54]:

$$F(\rho) = \frac{(e^2+1)K(e)-2L(e)}{(e^2-1)K(e)} \quad (4.32)$$

式中, e 表示椭圆偏心率, $K(e)$ 、 $L(e)$ 分别表示第一类完全椭圆积分和第二类完全椭圆积分。

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (4.33)$$

$$L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (4.34)$$

Brewe 和 Hamrock 借助线性回归的最小二乘法, 获得了一组关于 e 和 $K(e)$ 、 $L(e)$ 的简化近似公式:

$$e \approx 1.0339 \left(\frac{R_y}{R_x} \right)^{0.636}$$

$$K(e) \approx 1.0003 + \frac{0.5968R_x}{R_y}$$

$$L(e) \approx 1.5277 + 0.6023 \ln\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

式中, R_x , R_y 分别表示 x , y 轴上的等效半径, 其中,

$$R_x^{-1} = \rho_{x1} + \rho_{x2}$$

$$R_y^{-1} = \rho_{y1} + \rho_{y2}$$

对照主曲率函数:

$$F(\rho) = \frac{\left| \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right| + \left| \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right|}{\sum \rho}$$

在参考文献[54]中, 对于点接触问题, 当接触材料为钢材时, 给出了一组椭圆接触区域的长、短半轴参数简化公式和弹性趋近量公式。本文结合行星滚柱丝杠副滚柱与丝杠螺纹接触对特点, 给出以下参数公式:

$$a = 0.0236a^* \left(\frac{F_n}{\sum \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.35)$$

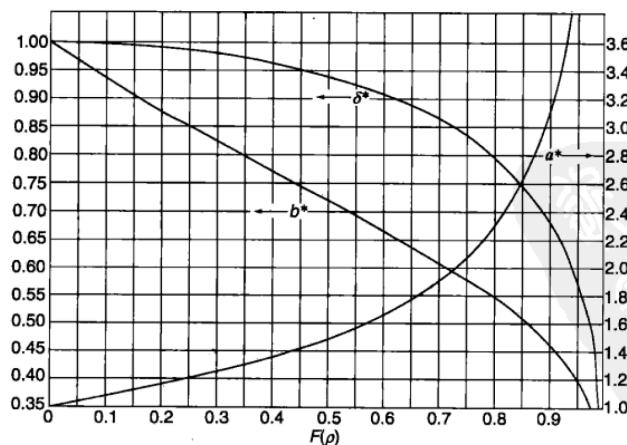
$$b = 0.0236b^* \left(\frac{F_n}{\sum \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.36)$$

$$\delta = 2.79 \times 10^{-4} \delta^* \left(F_n^2 \sum \rho \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.37)$$

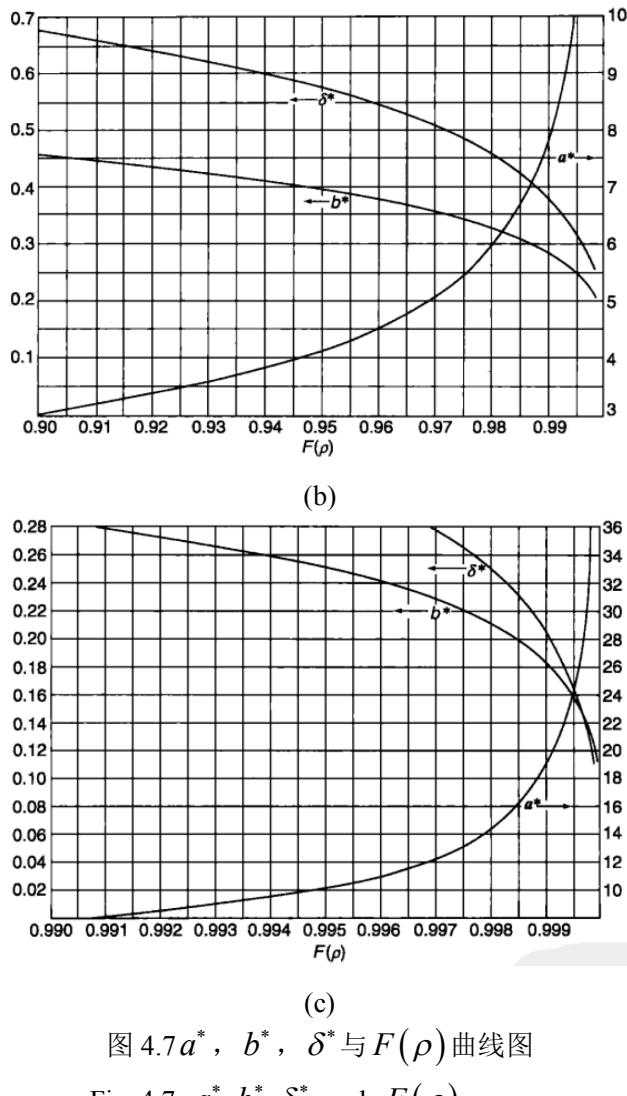
其中,

$$a^* = \left(\frac{2e^2 K(e)}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad b^* = \left(\frac{2K(e)}{\pi e} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \delta^* = \frac{2L(e)}{\pi} \left(\frac{\pi}{2e^2 K(e)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

式中, 接触参数 a^* , b^* , δ^* 是主曲率函数 $F(\rho)$ 的函数, 可以从图 4.7 中查出。



(a)

图 4.7 a^* , b^* , δ^* 与 $F(\rho)$ 曲线图Fig. 4.7 a^* , b^* , δ^* and $F(\rho)$ curves

4.4 设计实例接触分析

4.4.1 滚柱与丝杠啮合副轴向临界载荷

本节根据表 4.1 中的设计实例参数, 通过前文推导出的行星滚柱丝杠副单个滚柱与丝杠螺纹啮合接触强度解析计算公式, 求解单个滚柱与丝杠接触时的轴向临界载荷。

①综合椭圆半轴系数 k_p

$$\cos \theta = \frac{B - A}{A + B} = \frac{1}{7}$$

查图 4.6 得: $k_a = 1.10$, $k_b = 0.95$

则

$$k_p = \frac{1}{k_a k_b} = \frac{1}{1.10 \times 0.95} = 0.957$$

表 4.1 行星滚柱丝杠副结构参数

参数	丝杠	滚柱
大径/mm	31.84	11.84
中径/mm	30	10
小径/mm	28.08	8.08
螺距/mm	5	5
接触角	45°	45°
螺旋升角	9°	9°
单个滚柱螺纹 接触对	15	15
数量	1	8

②材料系数 Z_m

本例中，材料选用为 20CrMoH，滚柱、丝杠材料相同，弹性模量和泊松比见表 4.2。

将表 4.2 中物性参数带入式 (4-18)，得出：

$$\begin{aligned} Z_m &= \left(\pi \left(\frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_R^2}{E_R} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\pi \left(\frac{1-0.278^2}{210000} + \frac{1-0.278^2}{210000} \right) \right)^{-1} \\ &= 36221.9 \end{aligned}$$

表 4.2 20CrMoH 物性参数

参数	值
弹性模量 E / MPa	210000
泊松比 ν	0.278
拉伸屈服极限 σ_s / MPa	1161

③综合曲率系数 Z_ρ

$$\begin{aligned} Z_\rho &= \frac{2 \sin \alpha}{r_R} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_S + r_R - r_R \cot \alpha} \\ &= 0.33 \end{aligned}$$

由式 (4.20) 得出单个滚柱与丝杠螺纹接触对法向临界载荷为:

$$F_n = \frac{2\pi\sigma_H^3}{3Z_m^2 \bullet Z_\rho^2 \bullet k_p^3}$$

其中:

$$\sigma_H = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}k_{st}}$$

式中, k_{st} 是与接触椭圆参数 b/a 有关的参数, 取 $k_{st}=0.31$ 。

则

$$\sigma_H = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}k_{st}} = 2162.3 MPa$$

综上, 求得:

$$F_n = 169N$$

当考虑滚柱与丝杠接触对屈服极限时, 该行星滚柱丝杠副所能承受的理论轴向临界载荷为:

$$F = 8F_{ra} = 8nF_n \sin \alpha \cos \beta = 14164N$$

4.4.2 滚柱与螺母啮合副轴向临界载荷

本节根据表 4.3 中的设计实例参数, 通过前文推导出的行星滚柱丝杠副单个滚柱与螺母螺纹啮合接触强度解析计算公式, 求解单个滚柱与螺母接触时的轴向临界载荷。

表 4.3 行星滚柱丝杠副结构参数

参数	螺母	滚柱
大径/mm	51.92	11.84
中径/mm	50	10
小径/mm	48.16	8.08
螺距/mm	5	5
接触角	45°	45°
螺旋升角	9°	9°
单个滚柱螺纹牙接触数量	12	12
	1	8

对于滚柱和螺母螺纹接触对，接触点处主曲率函数求解如下：

$$R_{11} = R_{12} = \frac{r_R}{\sin \alpha}$$

$$R_{21} = \infty$$

$$R_{22} = -\frac{r_N + r_R + r_R \cot \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}$$

①综合椭圆半轴系数 k_p

$$A + B = \frac{2 \sin \alpha}{r_R} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_N + r_R + r_R \cot \alpha} = 0.263$$

$$B - A = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right)\left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right) \cos 2\gamma} = 0.02$$

$$\cos \theta = \frac{B - A}{A + B} = 0.076$$

查图 4.6 得 $k_a = 1.05$, $k_b = 0.98$

则

$$k_p = \frac{1}{k_a k_b} = 0.972$$

②材料系数 Z_m

将表 4.2 中物性参数带入公式 (4-18), 得出:

$$Z_m = 36221.9$$

③综合曲率系数 Z_ρ

$$Z_\rho = \frac{2 \sin \alpha}{r_R} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r_N + r_R + r_R \cot \alpha}$$

$$= 0.263$$

则滚柱与螺母螺纹接触对法向临界载荷为:

$$F_n = \frac{2\pi\sigma_H^3}{3Z_m^2 \cdot Z_\rho^2 \cdot k_p^3} = 254N$$

当考虑滚柱与螺母接触对屈服极限时, 该行星滚柱丝杠副所能承受的理论轴向临界载荷为:

$$F = 8F_{ra} = 8nF_n \sin \alpha \cos \beta = 17030N$$

4.4.3 螺纹接触对接触点处相对趋近量

①对于实例中滚柱与丝杠螺纹接触对, 由式 (4-32) 得其主曲率函数

$$F(\rho) = \frac{B - A}{A + B} = 0.143$$

查图 4.8 (a) 可以得出接触参数 $a^* = 1.07$, $b^* = 0.91$, $\delta^* = 0.99$ 。

$$\sum \rho = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} = 0.329 \text{ mm}^{-1}$$

接触点处的临界法向载荷 $F_n = 169 \text{ N}$ 。

则接触点处弹性相对趋近量为：

$$\begin{aligned}\delta &= 2.79 \times 10^{-4} \delta^* \left(F_n^2 \sum \rho \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2.79 \times 10^{-4} \times 0.99 \times (169^2 \times 0.3294)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5.83 \times 10^{-3} \text{ mm}\end{aligned}$$

②对于实例中滚柱与螺母螺纹接触对，由式（4-32）其主曲率函数

$$F(\rho) = \frac{B - A}{A + B} = 0.076$$

查图 4.8 (a) 可以得出接触参数 $a^* = 1.02$, $b^* = 0.95$, $\delta^* = 1$

$$\sum \rho = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} = 0.263 \text{ mm}^{-1}$$

接触点处的临界法向载荷 $F_n = 254 \text{ N}$ 。

则接触点处弹性相对趋近量为：

$$\begin{aligned}\delta &= 2.79 \times 10^{-4} \delta^* \left(F_n^2 \sum \rho \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2.79 \times 10^{-4} \times 1 \times (254^2 \times 0.263)^{\frac{1}{3}} \\ &= 7.17 \times 10^{-3} \text{ mm}\end{aligned}$$

4.4.4 理论计算结果分析

①滚柱与丝杠螺纹接触对处刚好达到屈服极限时

从 4.4.1 节计算结果可以看出，在行星滚柱丝杠副滚柱与丝杠螺纹接触对达到屈服极限时，接触点处的法向载荷 $F_n = 169 \text{ N}$ ，单个滚柱所承受的轴向临界载荷 $F_{ra} = 1770 \text{ N}$ ，该行星滚柱丝杠副此时所承受的轴向载荷 $F = 14164 \text{ N}$ ，4.4.3 节中计算结果得滚柱与丝杠螺纹接触对接触点处的弹性趋近量 $\delta = 5.83 \mu\text{m}$ 。

②滚柱与丝杠螺纹接触对处刚好达到屈服极限时

从 4.4.2 节计算结果可以得出，在行星滚柱丝杠副滚柱与螺母螺纹接触对达到屈服极限时，接触点处的法向载荷 $F_n = 254 \text{ N}$ ，单个滚柱所承受的轴向临界载荷 $F_{ra} = 2129 \text{ N}$ ，该行星滚柱丝杠副此时所承受的轴向载荷 $F = 17030 \text{ N}$ ，4.4.3 节中计算结果得滚柱与螺母螺纹接触对接触点处的弹性趋近量 $\delta = 7.17 \mu\text{m}$ 。

由以上结果可以看出，按照临界接触应力求出的行星滚柱丝杠副轴向临界载荷，滚柱与丝杠螺纹接触对较滚柱与螺母螺纹接触对所求得的临界载荷小，即当工作载荷增加到一定值时，滚柱与丝杠螺纹接触对较滚柱与螺母螺纹接触对先发生塑性变形，此时其接触点处弹性趋近量为 $\delta = 5.83 \mu\text{m}$ ，因此，在进行行星滚柱

丝杠副设计时，应先考虑滚柱与丝杠接触点处作为行星滚柱丝杠副进入屈服状态的判断依据。

4.4.5 行星滚柱丝杠副承载能力与接触角和螺旋角之间关系

①行星滚柱丝杠副承载能力与接触角之间关系

根据式 (4.20)，分析行星滚柱丝杠副承载能力与螺纹接触对接触角之间的关系，以文中给出的实例参数为基础，其余参数不变，接触角取 $\alpha \in (20^\circ, 75^\circ)$ ，利用 matlab 编程，当螺旋角为 $\beta = 9^\circ$ 时，输出行星滚柱丝杠副轴向载荷和接触角之间的关系曲线图，图 4.8 所示，从图中可以看出行星滚柱丝杠副轴向载荷在 $\alpha \in (20^\circ, 35^\circ)$ 范围内随着接触角增加而增大，在 $\alpha \in (35^\circ, 75^\circ)$ 范围内随着接触角增大逐渐减小。

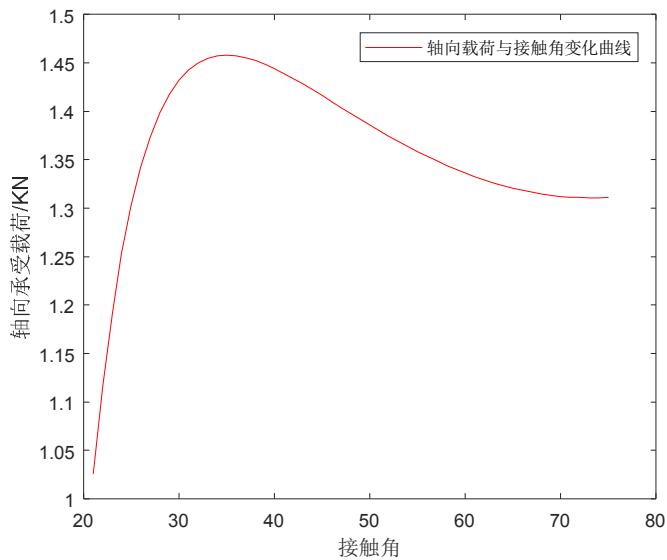


图 4.8 轴向载荷与接触角关系曲线图

Fig. 4.8 Axial load and contact angle curve

②行星滚柱丝杠副承载能力与螺旋角之间关系

根据式 (4-20)，分析行星滚柱丝杠副承载能力与螺旋角之间的关系，以文中给出的实例参数为基础，其余参数不变，螺旋角角取 $\alpha \in (5^\circ, 35^\circ)$ ，利用 matlab 编程，当螺纹接触对 $\alpha=45^\circ$ 时，输出行星滚柱丝杠副轴向载荷和螺旋角之间的关系曲线图，图 4.9 所示，从图中可以看出行星滚柱丝杠副轴向载荷在 $\beta \in (5^\circ, 35^\circ)$ 范围内随着螺旋角增加而减小。

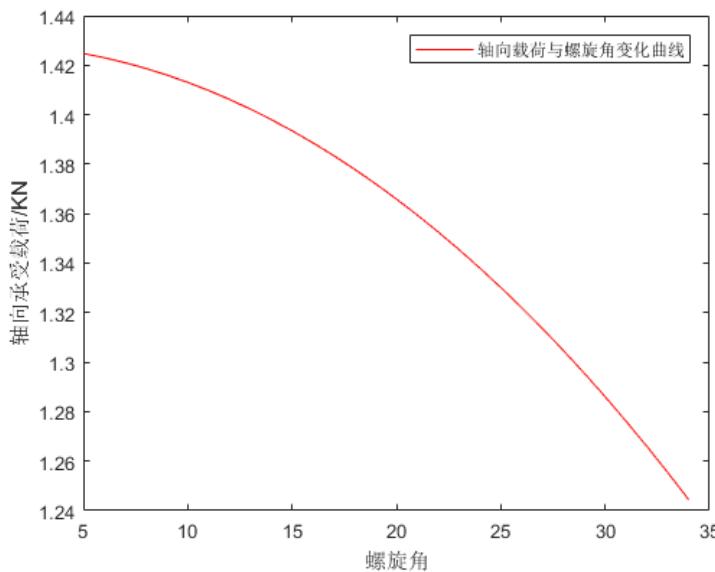


图 4.9 轴向载荷与螺旋角关系曲线图

Fig. 4.9 Axial load and helix angle curve

4.5 基于 ANSYS 的弹性接触分析

ANSYS 软件是由美国 ANSYS 公司研制的大型通用有限元分析软件，它是一款应用较广的 CAE 软件，主要由前处理模块、求解模块、后处理模块组成，能够进行结构、热、声、流体及电磁场等学科的研究^[52]。

4.5.1 螺纹接触对分析模型

前文对行星滚柱丝杠副进行了接触强度理论分析，基于以上理论分析结果，通过 ANSYS 进行静力学分析，在静载荷的作用下分析系统各构件的位移与应力应变。为了更加精确的分析系统的复杂应力应变问题，在进行有限元分析的过程中，可以依据前期理论计算结果对系统进行施加约束和静载荷。

行星滚柱丝杠副三维实体模型如图 3.4 所示，行星滚柱丝杠副有限元模型的重点应该是滚柱与丝杠和滚柱与螺母螺纹接触对接触部分。实际模型中，行星滚柱丝杠副结构复杂，网格划分后计算量庞大，为节省计算机资源，考虑对三维模型进行处理。本文将行星滚柱丝杠副中滚柱与丝杠和滚柱与螺母间的螺纹接触对简化为半球面与平面的接触模型，如图 4.10 所示，其中中间部分为滚柱，下面为丝杠，上面为螺母。

其中，行星滚柱丝杠副材料为 20CrMoH，弹性模量 $E = 2.10 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.278$ ，密度 $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，丝杠螺纹中径 $d_s = 30 \text{ mm}$ ，滚柱螺纹中径 $d_R = 10 \text{ mm}$ ，螺母螺纹中径 $d_N = 50 \text{ mm}$ ，螺距 $p = 5 \text{ mm}$ ，螺旋角 $\beta = 9^\circ$ ，接触角 $\alpha = 45^\circ$ ，滚柱螺纹圆弧半径 $R = d_R / 2 \sin \alpha$ 。

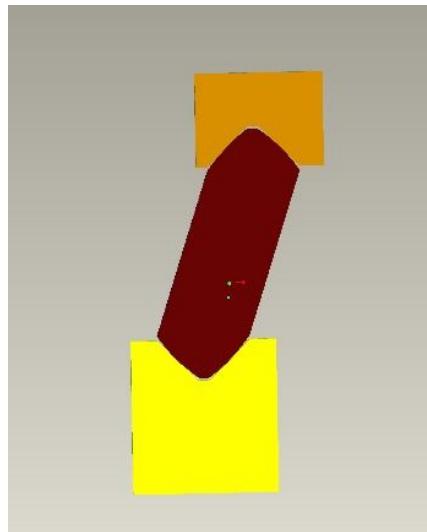


图 4.10 螺纹接触对简化模型

Fig. 4.10 Thread contact pair simplified model

对简化模型进行材料属性的定义，划分网格，设置点-面接触对，施加约束载荷。在丝杠底面施加全位移约束，滚柱、螺母进行径向约束，螺母轴向施加位移 0.01mm 载荷。划分网格后的行星滚柱丝杠副简化模型如图 4.11 所示。

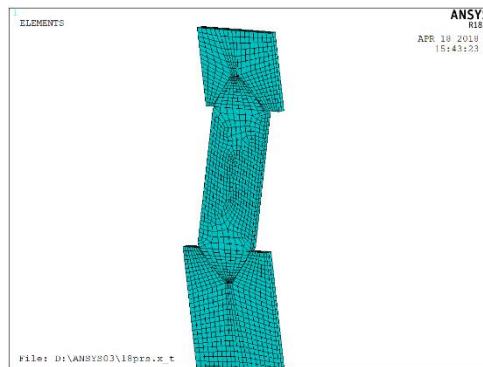


图 4.11 螺纹接触对简化模型和有限元网格示意图

Fig. 4.11 Thread contact pairs simplified model and finite element mesh schematic

4.5.2 结果分析

对行星滚柱丝杠副单个滚柱螺纹牙接触对进行简化模型进行有限元接触分析，在沿螺母轴向施加位移载荷 0.01mm 时，滚柱与丝杠和滚柱与螺母螺纹接触对间的接触应力、应变图如图 4.12 所示。

从图 4.12 中结果可以看出，最大接触应力发生在螺纹接触对接触点处，且两接触对处接触压应力相等，符合静力平衡理论。

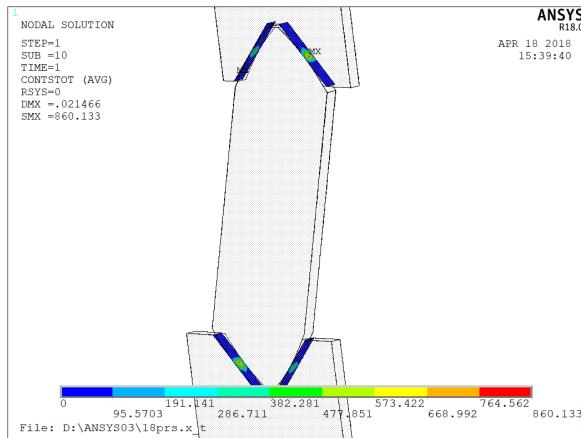


图 4.12 螺纹接触对接触应力图

Fig. 4.12 Thread contact pair contact stress diagram

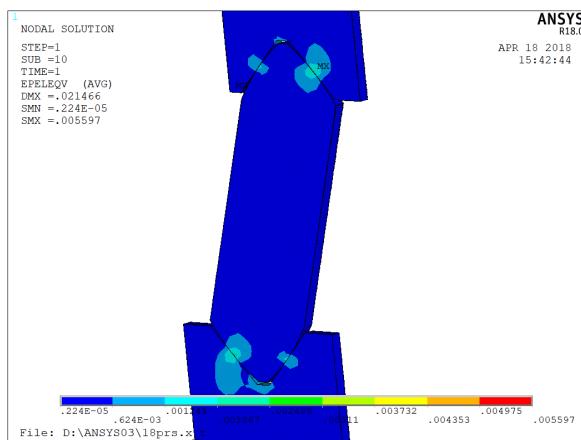


图 4.13 螺纹接触对应变图

Fig. 4.13 Thread contact pair deformation map

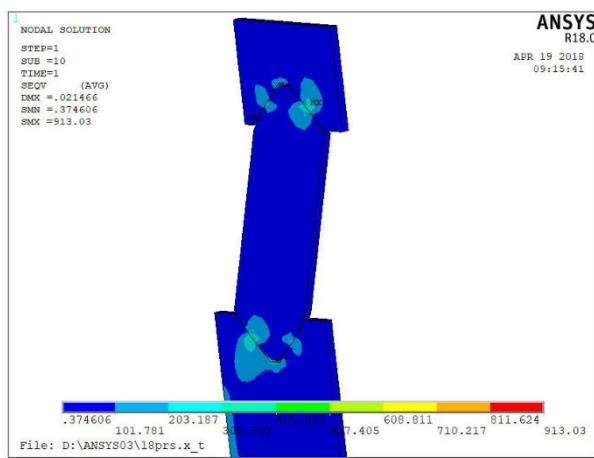


图 4.14 螺纹接触对应力分布图

Fig. 4.14 Thread contact stress distribution

观察接触对接触点处应力应变图, 图 4.13, 4.14 所示, 滚柱与丝杠、滚柱与螺母接触点连线通过滚柱轴线, 同时接触点处应力、应变变形方向也沿着接触点连线分布, 且滚柱与丝杠螺纹接触对接触点处的应力值大于滚柱与螺母螺纹接触对接触点处应力值。在分析过程中, 对丝杠进行了全约束, 由以上可以得出, 在螺母轴向施加一定载荷时, 滚柱螺纹牙同时与丝杠和螺母啮合, 此时丝杠螺纹接触点应力值大于螺母螺纹接触点处应力值, 这与前述理论推导公式的实例计算结果相符, 这验证了丝杠螺纹牙磨损要大于螺母螺纹牙磨损的现象。

4.6 小结

本章进行了行星滚柱丝杠副接触强度理论研究, 基于赫兹接触理论建立了行星滚柱丝杠副弹性接触模型, 分析了行星滚柱丝杠副中滚柱与丝杠和滚柱与螺母间的接触问题, 推导出了接触点处应力计算方法, 从理论分析过程可以得出接触对接触应力与接触点数量、接触角、螺旋角有关, 并给出相关数学模型。结合实例分析, 并通过有限元分析验证, 得出了滚柱与丝杠接触处应力要大于滚柱与螺母接触处, 即丝杠螺纹磨损要大于螺母螺纹磨损, 故而, 在进行行星滚柱丝杠副疲劳失效及强度计算时, 应该将滚柱与丝杠螺纹接触点的塑性变形作为基准来考虑。通过 matlab 编程输出行星滚柱丝杠副轴向载荷与接触角和螺旋角之间的关系曲线图, 得出了当螺旋角一定时, 行星滚柱丝杠副轴向载荷在 $\alpha \in (20^\circ, 35^\circ)$ 范围内随着接触角增加而增大, 在 $\alpha \in (35^\circ, 75^\circ)$ 范围内随着接触角增大逐渐减小; 当接触角一定时, 行星滚柱丝杠副轴向载荷随着螺旋角增加而减小。

5 支撑方式对行星滚柱丝杠副承载特性的影响

5.1 引言

对于行星滚柱丝杠副，在实际工程之前，需要评估其承载特性，除了前述对于行星滚柱丝杠副滚柱与丝杠、滚柱与螺母间螺纹接触对的接触特性分析，还应考虑行星滚柱丝杠副在承受载荷作用下丝杠的轴向变形和应力集中等系统的刚度问题。在研究丝杠的轴向变形和应力分布问题时，应分别考虑不同支撑方式对其影响。实际工程应用中，行星滚柱丝杠副有：固定—固定、固定—支撑、固定—自由三种支撑方式，而不同的支撑方式对丝杠轴向变形将是本章研究的重点。

5.2 行星滚柱丝杠副支撑方式和理论分析

在行星滚柱丝杠副运动过程中，通过滚柱分别与丝杠和螺母间的螺纹接触实将螺母上受到的轴向力传递到丝杠上。行星滚柱丝杠副运动过程中，滚柱对丝杠的作用力，可分解为接触点处的轴向力、径向力、切向力，如图 5.1 所示。

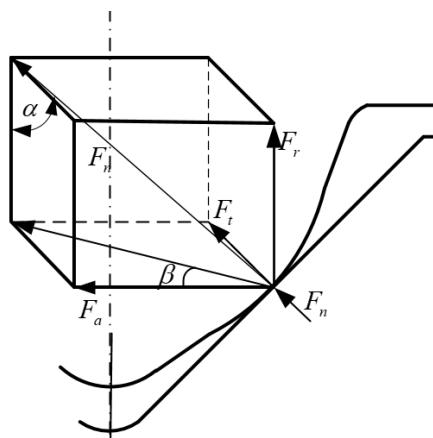


图 5.1 滚柱与丝杠螺纹接触点受力分析图

Fig. 5.1 The PRS threaded contact force analysis diagram

5.2.1 支撑方式

行星滚柱丝杠副实际工程应用中有三种常用的支撑方式：

①固定—固定，实施方式：两端均装有止推轴承和深沟球轴承，图 5.2 所示，固定的两端均可承受轴向力、径向力，能提高系统轴向刚度。

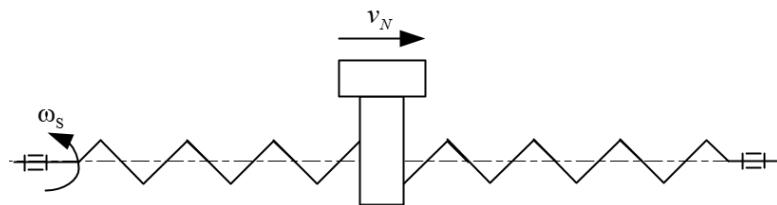


图 5.2 行星滚柱丝杠副两端固定支承示意图

Fig. 5.2 The PRS fixed support at both ends

②固定一支撑，实施方式：一端装有止推轴承和深沟球轴承，另一端只装有深沟球轴承，图 5.3 所示，该形式固定端可以承受轴向力和径向力，支撑端只能承受径向力，可实现轴向的微跳动。

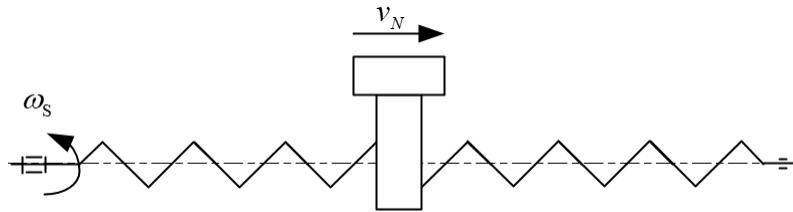


图 5.3 行星滚柱丝杠副一端固定一端支承示意图

Fig. 5.3 The PRS one end fixed end support

③固定一自由，实施方式：一端装有止推轴承和深沟球轴承，另一端自由，图 5.4 所示，该形式固定端可以承受轴向力和径向力，自由端不承受力，该形式一般轴向刚度低，定位精度不高。

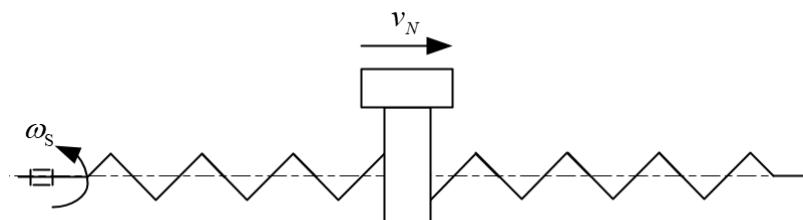


图 5.4 行星滚柱丝杠副一端固定一端自由示意图

Fig. 5.4 The PRS one end fixed at one end free

5.2.2 丝杠在不同支撑方式下的理论变形分析

在分析行星滚柱丝杠副丝杠承受载荷变形时，不仅要考虑丝杠的支撑方式，同时也应考虑螺母的运动过程。

①图 5.5 所示, 丝杠采用两端固定时的轴向受力简图, 其中,

$$F = F_1 + F_2 \quad (5.1)$$

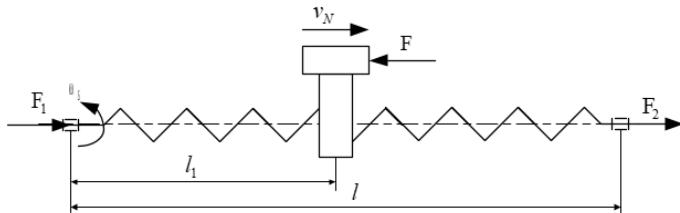


图 5.5 行星滚柱丝杠副两端固定支承轴向受力简图

Fig. 5.5 The PRS fixed support at both ends axial force diagram

借助变形协调方程求解^[55], 则:

$$\frac{F_1 l_1}{EA} = \frac{F_2(l - l_1)}{EA} \quad (5.2)$$

其中, F 表示轴向载荷, N; F_1, F_2 表示丝杠两端轴向支撑力, N; l_1 表示螺母距丝杠左端支撑位置的长度, mm; E 表示弹性模量, N/mm²; A 表示丝杠螺纹小径截面面积, mm²。

联立式 (5.1)、(5.2) 得:

$$F_1 = \frac{(l - l_1)}{l} F \quad (5.3)$$

$$F_1 = \frac{1}{l} F \quad (5.4)$$

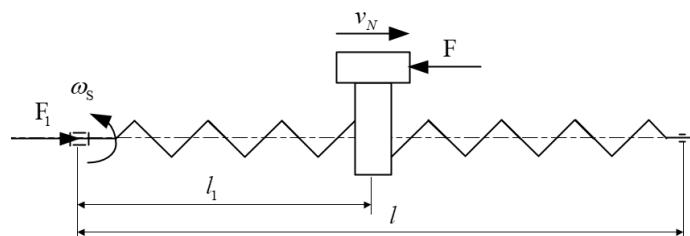
丝杠的变形量为:

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{2Fl_1(l - l_1)}{EAl} \quad (5.5)$$

从上式可以得出, 对于两端固定支承的行星滚柱丝杠副, 随着螺母沿轴向作直线运动, 丝杠变形量不断发生变化, 在行星滚柱丝杠副运动过程中丝杠轴向变形量与螺母到左端支撑距离成二次曲线关系。

②图 5.6 所示, 丝杠采用一端端固定、另一端支撑或自由时的轴向受力简图, 其中, 仅支撑端受轴向力, 即

$$F_1 = F \quad (5.6)$$



(a)

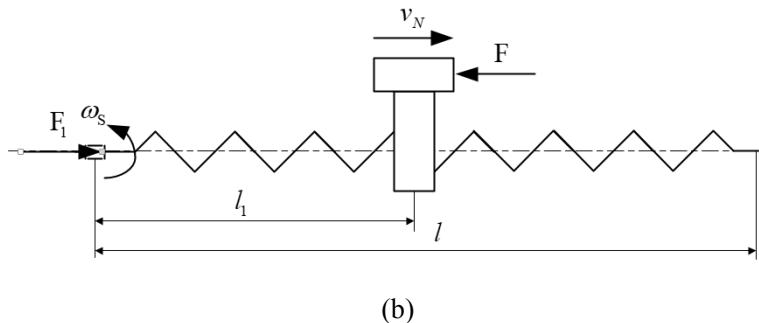


图 5.6 行星滚柱丝杠副一端固定一端支撑或自由轴向受力简图

Fig. 5.6 The PRS one end fixed end support and free axial force diagram

丝杠变形量为：

$$\Delta l = \frac{2Fl_1}{EA} \quad (5.7)$$

其中，其中， F 表示轴向载荷，N； F_1 表示丝杠两端轴向支撑力，N； l_1 表示螺母距丝杠左端支撑位置的长度，mm； E 表示弹性模量，N/mm²； A 表示丝杠螺纹小径截面面积，mm²。

从上式可以得出，对于一端端固定支承、另一端支撑或自由的行星滚柱丝杠副，随着螺母沿轴向作直线运动，丝杠变形量与螺母到固定端距离成线性关系。

5.2.3 实例分析

本文中所设计行星滚柱丝杠副结构参数如表 3.1 所示，其中丝杠有效长度为 $l=500mm$ ，丝杠螺纹小径 $d_{sf}=28mm$ ，弹性模量 $E=210000MPa$ ，对螺母施加轴向 $F=10000N$ 的力时，分别求出两端固定和一端固定时丝杠变形量与螺母运动之间的关系式：

①两端固定

$$\Delta l = \frac{2Fl_1(l-l_1)}{EA} = -3.10 \times 10^{-7}l_1^2 + 1.55 \times 10^{-4}l_1$$

②一端固定一端支撑或自由

$$\Delta l = \frac{2Fl_1}{EA} = 1.55 \times 10^{-4}l_1$$

从上式可以得出，对于两端支撑的行星滚柱丝杠副，丝杠轴向变形量与螺母距固定端离成二次曲线关系，且在螺母运动到丝杠中间位置，即 $l_1=l/2=250mm$ 时，变形量最大， $\Delta l = Fl/2EA=0.019mm$ ；对于一端固定一段支撑或自由的行星滚柱丝杠副，丝杠轴向变形量与螺母距固定端距离成线性关系，且在螺母运动到丝杠支撑端或自由端时，即 $l_1=l=500mm$ 时，变形量最大， $\Delta l = 2Fl/EA=0.078mm$ 。

通过实例分析，同等载荷条件下，两端固定支承方式的轴向最大变形量要比一端固定支承另一端支撑或自由方式下的最大变形量小，且两端固定支承条件下

最大变形量仅为一端固定支承条件下的 $1/4$ ，二者最大变形量出现位置不同（两端固定最大变形量出现在螺母运动到丝杠中间位置，一端固定最大变形量出现在支撑端或自由端）。因此在实际工程应用中，可采用两端固定支承方式来提高系统刚度。

5.3 基于 ANSYS 的不同支承方式下丝杠应变分析

前文中进行了对于行星滚柱丝杠副不同支撑方式下丝杠形变的理论研究，基于以上分析，通过 ANSYS 静力学分析功能，分析丝杠在静载荷作用下的应力应变问题。对于三维有限元模型，应区别实体模型与有限元模型的区别，大多数有限元分析模型都是先利用实体模型建模，其中分析过程中，实体模型并不参与，所施加在几何实体上的约束和载荷最终传递到有限元模型上（节点或单元）求解。

5.3.1 丝杠分析模型

根据表 3.1 结构参数表中给出的行星滚柱丝杠副中的丝杠结构参数，进行三维实体建模，其中，丝杠参数如下：丝杠螺纹中径 $d_s=30mm$ ，丝杠螺纹小径 $d_{sf}=28.08mm$ ，丝杠螺纹大经 $d_{sa}=31.84mm$ ，螺纹螺距 $p=5mm$ ，螺纹头数 $n_s=5$ ，丝杠有效长度 $l=500mm$ ，螺旋角 $\beta=9^\circ$ 。利用 Pro/E 建立丝杠三维实体模型。

从实体模型到有限元模型的前处理过程叫做网格划分^[53]。将 Pro/E 中建好的三维实体模型导入到 ansys 软件中，定义材料属性和单元类型，进行网格划分。所选材料为 20CrMoH，弹性模量 $E=2.10\times10^5 MPa$ ，泊松比 $\nu=0.278$ ，密度 $\rho=7.85\times10^3 kg/m^3$ 。丝杠网格划分结果如图 5.7 所示。

施加约束和载荷处理，丝杠支撑方式分别为固定—固定、固定—支撑、固定—自由，轴向载荷 $F=10000N$ 。

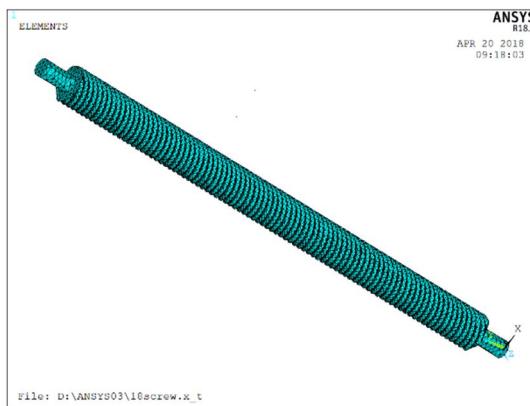


图 5.7 丝杠网格划分结果

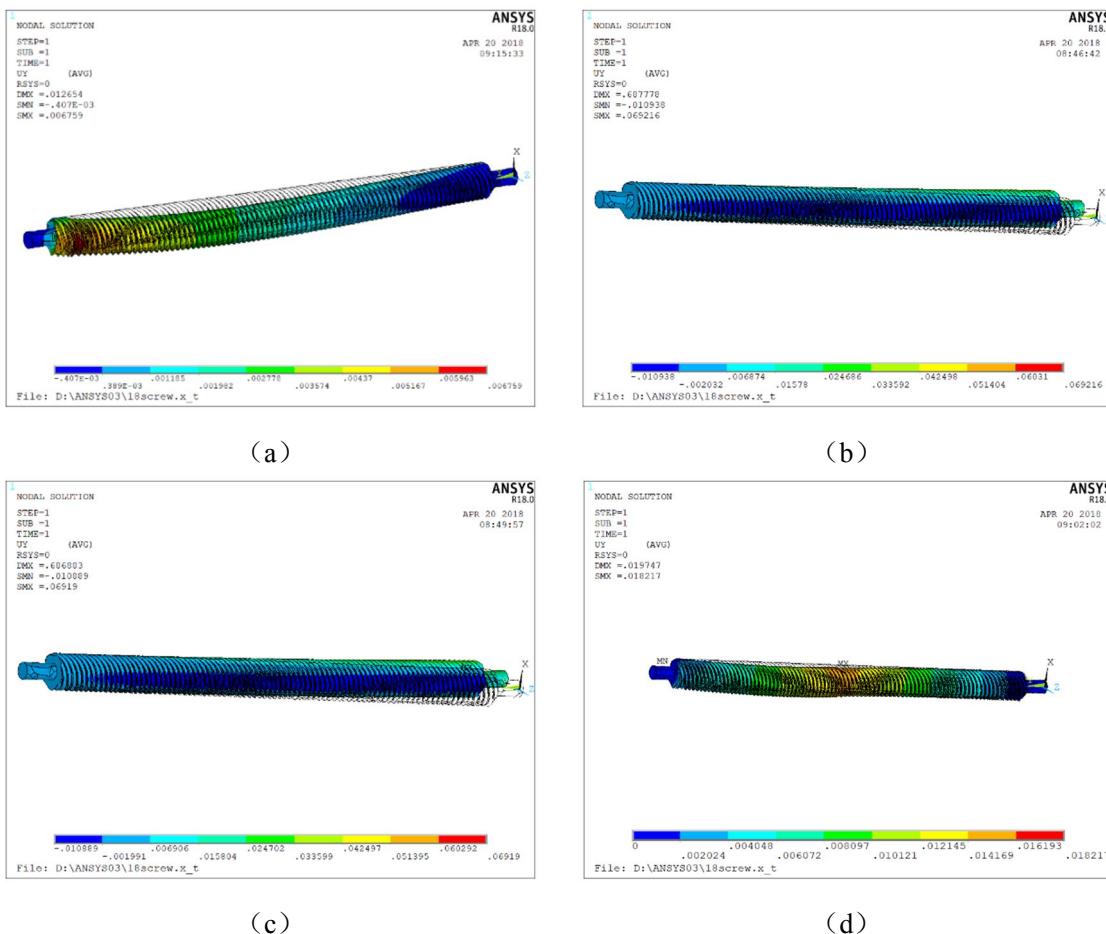
Fig. 5.7 The screw mesh results

5.3.2 结果分析

分别分析丝杠两端固定、一端固定一端支撑、一端固定一端自由三种支撑方式下丝杠受力沿轴向方向的应变量。

图 5.8 所示分别为三种支撑方式下螺母运动到不同位置时丝杠的应变分布情况。

从图 5.8 (a)、(b)、(c) 中可以看出，当螺母运动到丝杠最右端时，两端固定支承方式下的应变量远小于一端固定一端支撑（自由）方式，且一端固定一端支撑方式下的应变量与一端固定一端自由方式下的应变量近似相同；从图 5.8 (d)、(e)、(f) 中可以看出，当螺母运动到丝杠中间位置时，两端固定支承方式下的应变量相对螺母在右端时显著增大，但仍小于一端固定一端支撑（自由）方式，且一端固定一端支撑方式下的应变量与一端固定一端自由方式下的应变量近似相同；从图 5.8 (g)、(h)、(i) 中可以看出，当螺母运动到丝杠左端时，两端固定支承方式下的应变量与螺母在右端时丝杠变形量近似相同，略小于一端固定一端支撑（自由）方式，且一端固定一端支撑方式下的应变量与一端固定一端自由方式下的应变量近似相同。



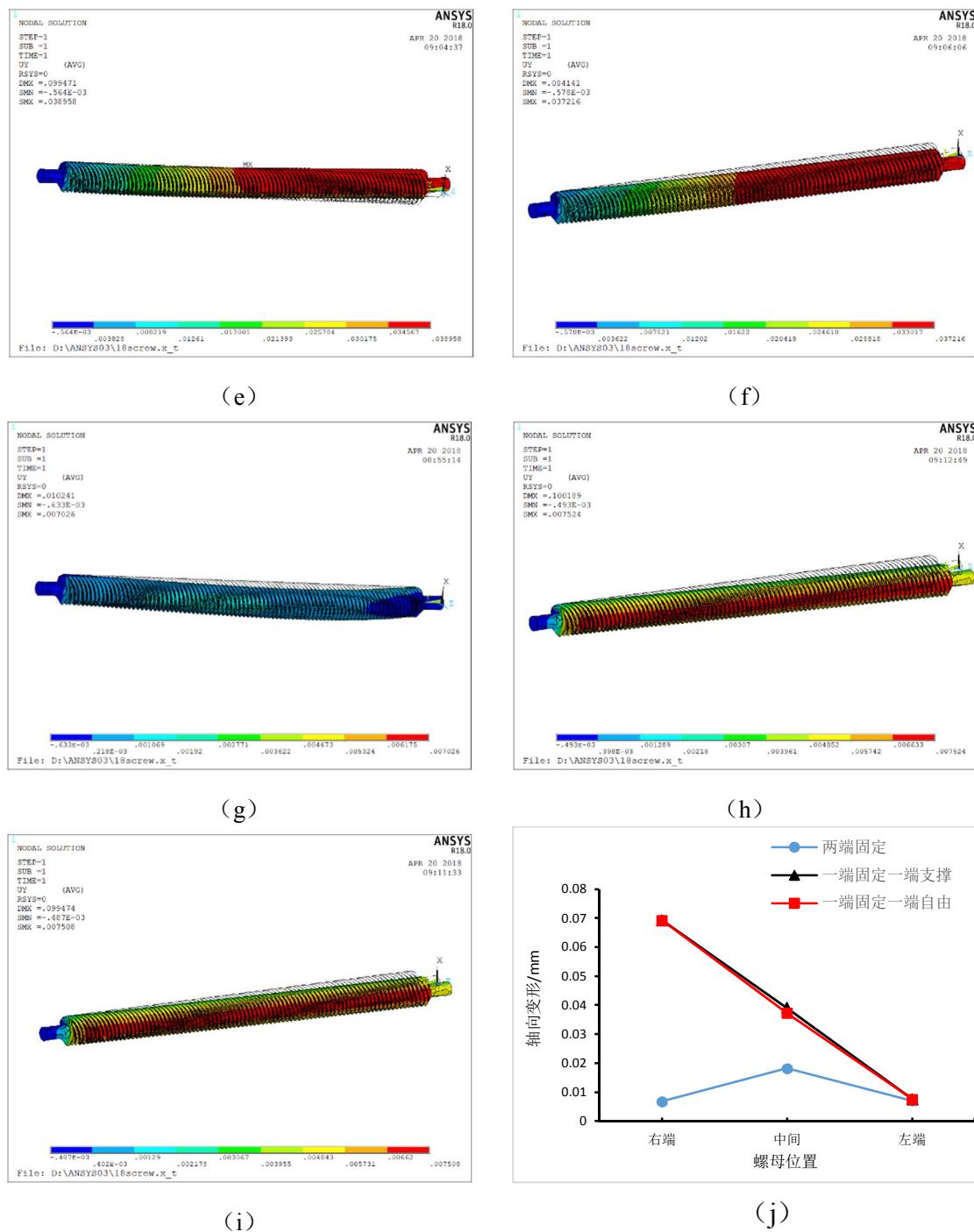


图 5.8 螺母运动到不同位置时丝杠的轴向应变图

Fig. 5.8 Axial strain diagram of the screw when the nut is moved to different positions

有限元分析结果与理论计算相符合, 从图 5.8 (j) 所示, 无论螺母运动到丝杠哪个位置, 两端固定支撑方式下丝杠轴向变形量都要小于一端固定一端支撑(自由) 方式下的丝杠轴向变形量。

5.4 小结

本章针对行星滚柱丝杠副的不同支撑方式，进行了不同支撑方式下丝杠轴向变形量的理论研究，推导出了行星滚柱丝杠副不同支撑方式下的变形量解析计算公式，得出对于两端固定支承的方式，其变形量与螺母到左端支撑距离成二次曲线关系；一段固定支撑、一端支撑或自由的方式，其变形量与螺母到左端支撑距离成线性关系，且两端固定支承的方式变形量要小于一端固定支撑、一端支撑或自由条件下的变形量。利用 ANSYS 软件对行星滚柱丝杠副的丝杠在不同支撑方式下受静载荷应变进行了有限元分析，对比理论推导结果，验证了理论推导公式的合理性。

6 结论与展望

6.1 结论

本文以行星滚柱丝杠副作为研究对象，探讨了行星滚柱丝杠副结构及工作原理，进行了行星滚柱丝杠副的运动学和承载特性的研究，给出了各构件间的运动关系解析公式，从理论上揭示了行星滚柱丝杠副的失效机理。

本文具体研究内容及结论如下：

①进行了基于空间螺旋理论行星滚柱丝杠副机构学研究，提出了一种行星滚柱丝杠副空间机构运动简图，从数理层面上论证了行星滚柱丝杠副的工作原理，通过对于行星滚柱丝杠副各构件几何形态分析研究，得出了各构件间的结构参数解析关系式。

②建立了行星滚柱丝杠副运动学模型，从理论上导出了各构件间的相互运动关系式，得出了行星滚柱丝杠副运动过程中，螺母沿轴向作直线运动的速度与丝杠转速之间的关系式： $v_{NO} = n_s p \omega_{SO} / 2\pi$ ，即滚柱与螺母间滑动与否不会影响到螺母沿轴向直线运动的速度，其速度与丝杠和螺母的螺纹头数、螺距以及主丝杠角速度成正比。通过 ADAMS 建立虚拟样机，并进行运动学仿真分析，验证了理论解析公式的正确性。

③基于赫兹理论建立了弹性接触模型，推导出了计算滚柱与丝杠螺纹接触对间应力的计算公式：

$$\sigma_H = k_p \cdot \sqrt[3]{\frac{3F_{ra}}{2\pi n \sin \alpha \cos \beta} \times Z_m^2 \times Z_\rho^2}$$

通过实例计算，得出了发生塑性变形的临界载荷和行星滚柱丝杠副失效时的最大轴向载荷。通过有限元分析，得出最大接触应力位于螺纹接触对的接触点处，且滚柱与丝杠接触处应力值大于滚柱与螺母接触处应力值。

④针对行星滚柱丝杠副的不同支撑方式，进行了不同支撑方式下丝杠轴向变形量的理论研究，得出了两端固定支承的方式，其变形量要小于一端固定支撑、一端支撑或自由条件下的变形量，并给出了理论公式，借助 ANSYS 软件对行星滚柱丝杠副的丝杠应变与支撑方式之间的关系进行了分析，验证了理论公式的正确性。

6.2 展望

综上所述，本文在行星滚柱丝杠副运动学和承载特性研究方面，得出了一定的结论，但鉴于个人能力和研究时间限制，以下几个方面问题还有待进一步研

究：

①行星滚柱丝杠副承载特性影响因素较多，本文仅考虑了接触对和支撑方式的影响，未对所有结构参数以及运动过程中的影响因素进行分析研究。

②本文在做运动学分析的过程中，未考虑几何误差对于运动学性能的影响，同时接触对间的几何误差对于承载特性的影响也有待进一步研究。

③本文在做行星滚柱丝杠副螺纹接触对有限元接触分析中，对其接触对模型进行了二维简化，未能充分考虑行星滚柱丝杠副整体模型，对于整体结构的有限元接触分析有待进一步研究。

致 谢

感谢导师陈兵奎教授三年来对我学习生活的指导，本论文是在陈老师悉心指导下完成的，三年的研究生学习，让我对本专业有了更清晰的认识，对于学科的发展前景也有了进一步的了解。三年的求学生涯，陈老师渊博的学识，严谨的治学精神和清晰地学术思维，一次次将我从迷茫中拉入学术研究的正途，陈老师对于本专业前瞻性的认识，推动着我在学术的道路上不断前行。

感谢实验室李朝阳副教授、梁栋博士、谭儒龙博士、彭昌琰博士、彭帅博士等在研究生阶段给予的帮助。

感谢实验室：张录合、黄健、安来强、杨云、莫绪伦、付杰、李伟斌等同门，有你们的陪伴让我的研究生生活充满了乐趣，同时也感谢你们三年来的帮助。

感谢单位给了我重回校园学习的机会，未来我将把自己的所学更好的应用到工作中。

感谢我的父母和爱人，是你们全力帮我分担生活的压力，尤其是我爱人，作为军嫂的你承担了太多的压力，但是对于我的工作和学习从未抱怨，是你对我一如既往的支持才让我得以集中精力完成学业。

最后，衷心的感谢百忙之中评阅论文和参与答辩的各位专家、教授！

祝明路

二〇一八年五月 于重庆

参考文献

- [1] 叶松年.一种旋转与直线往复运动转换机构的理论研究[J].河海大学机械学院学报,1994(04):40-45.
- [2] 刘更, 马尚君, 佟瑞庭,等. 行星滚柱丝杠副的新发展及关键技术[J]. 机械传动, 2012, 36(5):103-108.
- [3] Carl B S.Screw-Threaded Mechanism[P].US Patent, 2683379,1954.
- [4] Carl B S.NUT and Screw Devices[P].US Patent, 3173304,1965.
- [5] Carl B S.Roller Screw[P].US Patent, 3182522,1965.
- [6] SKF 公司推出高精密滚柱丝杠[J]. 现代制造, 2006(7):11-11.
- [7] Lemor P C. The roller screw, an efficient and reliable mechanical component of electro-mechanical actuators[J]. 1996, 1.
- [8] Velinsky S A, Chu B, Lasky T A. Kinematics and Efficiency Analysis of the Planetary Roller Screw Mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(1).
- [9] Hojjat Y, Agheli M M. A comprehensive study on capabilities and limitations of roller-screw with emphasis on slip tendency[J]. Mechanism & Machine Theory, 2009, 44(10):1887-1899.
- [10] Aurégan G, Fridrici V, Kapsa P, et al. Experimental simulation of rolling-sliding contact for application to planetary roller screw mechanism[J]. Wear, 2015, s 332–333:1176-1184.
- [11] Dupont P. A Combinatory Design Methodology Dedicated to the Ball and Roller Screw Drives for Optimum Design[A]. In: ASME 2010, Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis[C]. 2010:361-370.
- [12] Chih-Kang S, Chinghua H, Ray-Quen H. The finite element analysis on planetary rolling process[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2001, 113(1-3):115-123.
- [13] Lisowski F, Ryć J. A Methodology of Designing the Teeth Conjugation in a Planetary Roller Screw[J]. Archive of Mechanical Engineering, 2016, 63(4).
- [14] Jones M, Velinsky S, Lasky T. Dynamics and Efficiency of the Planetary Roller Screw Mechanism[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2015, 8(1).
- [15] Aurégan G, Fridrici V, Kapsa P, et al. Experimental simulation of rolling-sliding contact for application to planetary roller screw mechanism[J]. Wear, 2015, s 332–333:1176-1184.
- [16] Morozov V V, Panyukhin V I, Zhdanov A V. Increasing the load capacity and rigidity of roller-screw mechanisms by adjusting the screw surfaces[J]. Russian Engineering Research, 2016, 36(5):345-351.
- [17] 马尚君. 行星滚柱丝杠副结构设计方法及其传动性能研究 [D]. 西安: 西北工业大学,

2013.

- [18] 付晓军, 刘更, 马尚君, 等. 行星滚柱丝杠副螺旋曲面啮合机理研究[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3):26-33.
- [19] 马尚君, 刘更, 周建星, 等. 行星滚柱丝杠副运转过程动态特性分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(3):167-171.
- [20] Tong R. A Frictional Heat Model of Planetary Roller Screw Mechanism Considering Load Distribution[J]. Mechanics Based Design of Structures & Machines, 2015, 43(2):164-182.
- [21] 靳谦忠, 杨家军. 滚珠丝杠副和行星式滚柱丝杠副静刚度的比较研究[J]. 机械科学与技术, 1999(2):230-232..
- [22] 靳谦忠, 杨家军. 行星式滚柱丝杠副的运动特性及参数选择[J]. 制造技术与机床, 1998(5):13-15.
- [23] 杨家军, 杨保哲, 朱继生, 等. 预紧力对行星滚柱丝杠轴向变形及摩擦的影响[J]. 机械传动, 2011, 35(12):16-18.
- [24] 杨家军, 韦振兴, 朱继生, 等. 行星滚柱丝杠副载荷分布及刚度计算[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2011(4):1-4.
- [25] 韦振兴, 杨家军, 朱继生, 等. 行星滚柱丝杠副的结构参数优化分析[J]. 机械传动, 2011(06):44-47.
- [26] 程远, 范元勋. 行星滚柱丝杠副预紧力研究[J]. 机械制造, 2017(11):50-52.
- [27] 王乐, 李海泓, 张玲. 行星滚柱丝杠小转角运动的动力学分析[J]. 航空兵器, 2015(02):58-64.
- [28] Brecher C, Hildebrand M, Krella C. Speeds, lead and characteristic defect frequencies of arbitrary roller screws[J]. Production Engineering, 2017(1):1-8.
- [29] Jones M H, Velinsky S A. Kinematics of Roller Migration in the Planetary Roller Screw Mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2012, 134(6):579-580.
- [30] Liu Y, Wang J, Cheng H, et al. Kinematics Analysis of the Roller Screw Based on the Accuracy of Meshing Point Calculation[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(5):1-10.
- [31] Ma S, Zhang T, Liu G, et al. Kinematics of Planetary Roller Screw Mechanism considering Helical Directions of Screw and Roller Threads[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015:1-11.
- [32] Mamaev I M, Morozov V V, Fedotov O V, et al. Harmonic analysis of the kinematic error in a planetary roller screw[J]. Russian Engineering Research, 2016, 36(7):515-519.
- [33] 韩敏, 黄龙涛, 畅玉春. 行星滚柱丝杠副滑动特性的分析与研究[J]. 机械设计与制造, 2017(5):73-76.

- [34] Baccar A, Lambert J Y, Lubrecht A A. Modeling and analysis of a planetary roller screw[C]// 2014:274-283.
- [35] Ma S, Liu G, Fu X, et al. Load distribution of rollers considering errors in planetary roller screw mechanism[J]. Harbin Gongye Daxue Xuebao/journal of Harbin Institute of Technology, 2015, 47(7):98-102.
- [36] Zhang W, Geng L, Ma S, et al. Load Distribution of Planetary Roller Screw Mechanism with Different Installations[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2015, 33(2):229-236.
- [37] Abevi F K, Daidie A, Chaussumier M, et al. Static Analysis of an Inverted Planetary Roller Screw Mechanism[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2016, 8(4).
- [38] Zhang W, Liu G, Tong R, et al. Load distribution of planetary roller screw mechanism and its improvement approach[J]. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science 1989-1996 (vols 203-210), 2016, 230(18).
- [39] Abevi F K, Daidie A, Chaussumier M, et al. Static Load Distribution and Axial Stiffness in a Planetary Roller Screw Mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2016, 138(1).
- [40] Zhdanov A V, Morozov V V. Theoretical Study of the Load Distribution on the Threads for Roller Screw Mechanisms of a Friction Type [J]. Procedia Engineering, 2016, 150:992-999.
- [41] 刘艳强, 尚宇, 程泓勋. 行星滚柱丝杠弹性接触变形计算与分析[J]. 制造业自动化, 2016, 38(11):113-115.
- [42] 姚琴, 吴立言, 刘更, 等. 行星滚柱丝杠副弹塑性接触分析[J]. 机械传动, 2016(11):106-110.
- [43] 宋敏, 杨雨薇. 行星滚柱丝杠副滚柱齿内啮合静态接触分析[J]. 西安航空学院学报, 2015(3):38-41.
- [44] 李凯, 叶佩青, 周晓尧等. 精密行星滚柱丝杠的传动特性[J]. 光学精密工程, 2016, 24(08):1908-1916.
- [45] 佟瑞庭, 刘更, 史佑民, 等. 螺纹牙型角对行星滚柱丝杠副接触特性影响研究[J]. 机械设计, 2016(5):31-34.
- [46] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 高等教育出版社, 2006.5.
- [47] 孙健利, 靳谦忠. 星式滚柱丝杠副的传动原理及几何关系研究[C]// 中国机械工程学会机械传动年会. 1992.
- [48] Jin Q L. The Research on Friction Mechanism of the Planetary Roller Screw[J]. Journal of Huazhong University Ofence & Technology, 1998.
- [49] Popov V L. Contact Mechanics and Friction[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [50] 靳谦忠, 杨家军. 行星式滚柱丝杠副的摩擦机理研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学)

版), 1998(6):82-83.

- [51] 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理-第2版[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [52] 胡仁喜, 康士廷. ANSYS 14.0 机械与结构有限元分析从入门到精通. 第2版[M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.
- [53] 万长森. 滚动轴承的分析方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.
- [54] Harris T A, Kotzalas M N, 哈里斯, 等. 滚动轴承分析(原书第5版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [55] 陆明万. 工程弹性力学与有限元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

附录

A. 作者在攻读硕士期间发表的论文目录

- [1] 祝明路, 陈兵奎. 基于空间螺旋理论的行星滚柱丝杠副自由度计算与分析[J]. 重庆大学学报, 2017.